Segédanyag a Valószínűségszámítás 2. (alk.mat.) tantárgyhoz

2014. november 20.

Definíció. **σ-algebra:** Legyen Ω nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$. Az $\mathcal{A}$ halmaz σ-algebra, ha
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathcal{A}$ (zárt a komplementer képzésre)
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ (zárt a megszámlálható unióra)

Definíció. **Kolmogorov-féle vsz.-i mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol:
- Ω: nemüres halmaz
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ σ-algebra
- P: $\mathcal{A} \to [0;1]$ halmazfüggény, amelyre
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$-ra
  - páronként kizáró $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ eseményekre

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Jelölje az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Lebesgue-mértékét $\lambda(A)$. Ha $n = 1$, akkor a Lebesgue-mérték a hossz, $n = 2$-nél a terület, $n = 3, 4, ...$ esetén pedig a térfogat.

Definíció. **Geometriai vsz.-i mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol:
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(\Omega) < \infty$
- $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \in \mathbb{R}^n\}$
- $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\text{"kedvező" terület}}{\text{összes terület}}$.

Mintavétel: Adott N termék, ezek közül M selejtes. Az összes termékből kiveszünk n darabot. Mi a valószínűsége, hogy ezek között k selejtes lesz? $(k = 0, 1, ..., n)$
- Visszetevés nélkül: $\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- Visszatevéssel: $\displaystyle\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ahol $p = \frac{M}{N}$ a selejtarány

Tétel. **Szita formula vagy Poincaré-formula:**

Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ tetszőleges események.

$P(A_1, ..., A_n$ közül legalább 1 bekövetkezik$) = P(A_1 \cup ... \cup A_n) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)}$, ahol $S_k^{(n)} = \sum\limits_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$

Feltételes valószínűség: Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$

Definíció. **Teljes eseményrendszer (TER)** $B_1, B_2, ...$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha
- $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden i$\neq$j-re,
- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Tétel. **Teljes valószínűség tétele:** Legyen $B_1, B_2, ...$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re
Ekkor $P(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)$.

Tétel. **Bayes-tétel:** Legyen $B_1, ..., B_n$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re
Ekkor $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}$.

Definíció. **Események függetlensége:** A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva).

Definíció. **Események teljes függetlensége:** Az $A_1, A_2, ..., A_n$ események teljesen függetlenek, ha $P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$ minden $k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$-re.

Definíció. **Valószínűségi változó:** X: $\Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B$\subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra.

Definíció. **Valószínűségi változó eloszlása:** $Q_X(B) = P(X \in B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$

Valószínűségi változók típusai:
- diszkrét;
- folytonos;
- se nem diszkrét, se nem folytonos.

Definíció. **Diszkrét valószínűségi változó:** értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1,...,x_n,...\}$ elemekből áll.
Ekkor eloszlása: $p_i := P(X = x_i) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$

Definíció. **X val.változó abszolút folytonos**, ha létezik olyan f(x) függvény, amelyre $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor f(x)-et **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Definíció. **Várható érték** X várható értéke: EX=$\int\limits_{\Omega} X\,dP$, ha ez létezik.

Definíció. **l. momentum** : EX^l=$\int\limits_{\Omega} X^l\,dP$, ha ez létezik.

Definíció. **X szórásnégyzete** : D^{2}X=E[(X-EX)]^2 = EX^2-E^{2}X.

Definíció. **X szórása** : DX=$\sqrt{D^2X}$.
Legyen X diszkrét valószínűségi változó, ami az x_1,x_2,... értékeket veszi fel, p_1,p_2,... valószínűségekkel. Ekkor EX=$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_k p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens. Ugyanígy EX^l=$\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_k)^l p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.
Nevezetes diszkrét eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D^{2}X
Karakterisztikus (indikátorvált.)	Ind(p)	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Geometriai (Pascal)	Geo(p)	$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ k=1,2,...	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeometriai	Hipgeo(N, M, n)	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k=0,1,...,n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$
Binomiális	Bin(n,p)	$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ k=0,1,...,n	np	$np(1-p)$
Negatív binomiális	NegBin(n,p)	$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ k=n,n+1,...	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	Poi(λ)	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ k=0,1,...	λ	λ

Előfordulásuk:
- Indikátor változó: egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem
- Geometriai: hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény
- Hipergeometriai: visszatevés nélküli mintavétel
- Binomiális: visszatevéses mintavétel
- Negatív binomiális: hányadikra következik be n. alkalommal egy p valószínűségű esemény

Állítás. Legyenek $X, Y, X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók; $c_i, a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor
- $E(X + Y) = EX + EY$;
- $E(aX) = aEX$;
- $E\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i EX_i$;
- $D^2(aX + b) = a^2 D^2 X$.

Definíció. **X val.változó eloszlásfüggvénye:** $F_X(x) = P(X < x)$.

Állítás. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;
- balról folytonos;
- monoton növő.

Állítás. Tetszőleges X val. változó esetén
- $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$
- $EX^l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l\,dF(x)$

Állítás. Tetszőleges X val. változó esetén
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;
- $P(a < X \leq b) = F(b+) - F(a+)$.

Állítás. Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor
- f(x)=F'(x);
- f(x) $\geq$ 0;
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;

- $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re;
- $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Abszolút folytonos val.változó várható értéke: $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$.

Abszolút folytonos val.változó l. momentuma: $EX^l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\, dx$.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Egyenletes	$E(a,b)$	$\begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	$\text{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Standard normális	$N(0, 1^2)$	$\Phi(x) = \ldots$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$	0	1
Normális	$N(m, \sigma^2)$	...	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2

További nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Cauchy	$Cauchy(a,b)$ $a \in \mathbb{R}, b > 0$	$\frac{1}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\pi b \left[1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]} \quad x \in \mathbb{R}$	$\nexists$	$\nexists$
Pareto*	$Pareto(\alpha, \beta)$ $a, b > 0$	$\begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha & \text{ha } x \geq \beta \\ 0 & \text{ha } x < \beta \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{ha } x \geq \beta \\ 0 & \text{ha } x < \beta \end{cases}$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha^3}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlás-függvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Khí-négyzet	$\chi^2_k \quad k \in \mathbb{N}$	...	$\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \quad x \in \mathbb{R}$	k	$2k$
Gamma	$\Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$	...	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Béta	$Beta(\alpha, \beta)$ $\alpha, \beta > 0$	...	$\begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & x \in [0,1] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Lognormális	$LN(m, \sigma^2)$ $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	...	$\begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}} & \text{ha } x \leq 0 \\ 0 & \text{ha} x < 0 \end{cases}$	$e^{m+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2}-1)e^{2m+\sigma^2}$

* A Pareto-eloszlásnak akkor van véges várható értéke a képletnek megfelelően, ha $\alpha > 1$, szórásnégyzete pedig akkor, ha $\alpha > 2$.

Állítás. **Val.változó függvényének várható értéke**
Legyen X val. változó; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény.
Ekkor

- $E(g(X)) = \sum\limits_k g(x_k) p_k$, ha X diszkrét
- $E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$, ha X abszolút folytonos

Mindkét esetben a várható érték létezéséhez a szumma/integrál abszolút konvergenciájára van szükség.

Állítás. **Abszolút folytonos val.változó szigorúan monoton függvényének eloszlás- és sűrűségfüggvénye**
Legyen X abszolút folytonos val. változó; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény. Ekkor
a.) Y=g(X) eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = F_{g(X)}(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha g szig. mon. növő} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha g szig. mon. csökkenő} \end{cases}$$

b.) Y=g(X) sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|[g^{-1}(y)]'\right| = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

Állítás. **Normálás**
Legyen X$\sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Állítás. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Állítás. $\Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1-q) \quad 0 < q < 1$

Definíció. **Val.változók konvolúciója:** Legyenek X és Y független val.változók. X és Y konvolúciójának (jel. X∗Y) az X+Y val.változót nevezzük.
Állítás. **A konvolúció eloszlásának meghatározása**

- Diszkrét eset: $P(X+Y=k) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} P(X=l) \cdot P(Y=k-l)$
- Folytonos eset: $f_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z-u) du$

Állítás. Legyenek $X_1, ..., X_n$, X és Y független val. változók

- $X_1 \sim \text{Ind}(p), ..., X_n \sim \text{Ind}(p) \quad \Rightarrow \quad X_1 + ... + X_n \sim \text{Bin}(n,p)$
- $X \sim \text{Bin}(n,p)$, $Y \sim \text{Bin}(m,p) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \text{Bin}(n+m,p)$
- $X_1 \sim \text{Geo}(p), ..., X_n \sim \text{Geo}(p) \quad \Rightarrow \quad X_1 + ... + X_n \sim \text{NegBin}(n,p)$
- $X \sim \text{Poi}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Poi}(\lambda_2) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \text{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$
- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$
- $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda) \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$

Definíció. **Valószínűségi vektorváltozó:** $\mathbf{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B$\subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt halmazra.

Definíció. **Valószínűségi vektorváltozó eloszlása:**
$Q_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) = P(\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B)$

Definíció. **X valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye:**
$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} < \mathbf{x}) = P(X_1 < x_1, ..., X_d < x_d)$.

Állítás. **Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:**
- $0 \le F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \le 1$;
- minden koordinátájában monoton növő;
- minden koordinátájában balról folytonos;
- $\lim\limits_{x_1,...,x_d \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_d) = 1$;
- $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_d) = 0$ minden i-re.

Definíció. **X valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos** , ha létezik olyan $f_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_d)$ függvény, amelyre
$F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_d) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} ... \int\limits_{-\infty}^{x_d} f_{\mathbf{X}}(t_1, ..., t_d)\, dt_1 ... dt_d$.
Ilyenkor $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$-et **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Mostantól $d = 2$ lesz, és a következő jelöléseket és elnevezéseket használjuk:
- $F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y)$ $\rightsquigarrow$ együttes eloszlásfüggvény
- $F_X(x) = P(X < x)$, $F_Y(y) = P(Y < y)$ $\rightsquigarrow$ peremeloszlásfüggvények
- $f_{X,Y}(x, y)$ $\rightsquigarrow$ együttes sűrűségfüggvény
- $f_X(x), f_Y(y)$ $\rightsquigarrow$ peremsűrűségfüggvények

Állítás.
- $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$ és $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$
- $F_{X,Y}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, v)\, dudv$
- $f_{X,Y}(x, y) = \partial_y \partial_x F_{X,Y}(x, y) = \partial_x \partial_y F_{X,Y}(x, y)$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = 1$
- $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$ és $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx$

Állítás. Legyen X és Y abszolút folytonos, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- $P(X \in A) = \int\limits_{x\in A} dF_X(x) = \int\limits_{x\in A} f_X(x)\, dx$
- $P((X, Y) \in B) = \iint\limits_{(x,y)\in A} dF_{X,Y}(x, y) = \iint\limits_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$

Állítás.
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$
- X, Y függetlenek $\Rightarrow$ $E(XY) = EX \cdot EY$

Definíció. X **és** Y **kovarianciája:** $\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - EX)(Y - EY)\right]$.
Köv.: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY$.
Elnevezés: ha $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy X és Y **korrelálatlanok**.

Állítás.
- Ha X és Y függetlenek egymástól, akkor korrelálatlanok is.
- Ha X és Y korrelálatlanok, akkor ebből **nem** következik, hogy függetlenek is!!!!!

Állítás. **A kovariancia tulajdonságai:**
Legyenek $X, Y, X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor
- $\mathrm{Cov}(X, X) = D^2X$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
- $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$
- $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $D^2(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} D^2X_i + 2 \sum\limits_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
- X,Y függetlenek $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

Definíció. X **és** Y **korrelációja:** $R(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{DXDY}$.
A korreláció két valószínűségi változó lineáris kapcsolatát méri:
- $R > 0$ $\Rightarrow$ pozitív a kapcsolat
  $R < 0$ $\Rightarrow$ negatív a kapcsolat
- $R^2 \sim 1$ $\Rightarrow$ erős a kapcsolat
  $R^2 \sim 0.5$ $\Rightarrow$ közepes a kapcsolat
  $R^2 \sim 0$ $\Rightarrow$ gyenge a kapcsolat

Közös tartalmú fogalmak/elnevezések valószínűségszámításban és mértékelméletben:

Valószínűségszámítás		Mértékelmélet
valószínűségi mező	-	mértéktér
valószínűség	-	mérték
valószínűségi változó	-	(Borel-)mérhető függvény
várható érték	-	integrál
1 valószínűségű konvergencia	-	m.m. konvergencia
sztochasztikus konvergencia	-	mértékbeli konvergencia

Néhány mértékelméleti tétel valószínűségszámítási köntösben:

Tétel. **Fatou-lemma.**

Legyen X_n val. változó sorozat; minden n-re $|X_n| \leq Y$, ahol $EY < \infty$. Ekkor $E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n \leq \limsup_{n\to\infty} EX_n \leq E(\limsup_{n\to\infty} X_n)$.

Tétel. **Beppo Levi tétel (monoton konvergencia).**
Legyen X_n monoton növő val. változó sorozat; minden n-re $X_n \geq Y$, ahol $EY > -\infty$ és $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{1 \text{ vsz.}} X$. Ekkor $EX_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} EX$.

Tétel. **Lebesgue-tétel (majorált konvergencia).**
Legyen X_n val. változó sorozat; minden n-re $|X_n| \leq Y$, ahol $EY < \infty$ és $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{1 \text{ vsz.}} X$.
Ekkor $EX_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} EX, \quad E|X| < \infty$ és $\quad E|X_n - X| < \infty$.

Állítás. **Cauchy-egyenlőtlenség.** Legyenek X és Y val. változók. Ekkor $E|X \cdot Y| \leq \sqrt{EX^2 \cdot EY^2}$, ha ezek a várható értékek léteznek.

Állítás. **Jensen-egyenlőtlenség.** Legyen X val. változó, EX létezik, g konvex függvény. Ekkor $g(EX) \leq Eg(X)$.

Állítás. **Hölder-egyenlőtlenség.** Legyenek X és Y val. változók, $r > 1$ és $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Ekkor $E|X \cdot Y| \leq (E|X|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot (E|X|^s)^{\frac{1}{s}}$.

Állítás. **Minkowski-egyenlőtlenség.** Legyenek X és Y val. változók, $r > 1$. Ekkor $(E|X+Y|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (E|X|^r)^{\frac{1}{r}} + (E|Y|^r)^{\frac{1}{r}}$.

Tétel. **Valószínűségi vektorváltozó transzformáltjának sűrűségfüggvénye.** Legyen $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó $f_{\underline{X}}$ sűrűségfüggvénnyel, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ összefüggő és nyílt halmaz. Legyen $\underline{g} : A \to A$ függvény, amely invertálható és inverze folytonosan differenciálható. Legyen $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X}), \quad J = \partial_{\underline{y}} \underline{g}^{-1}(\underline{y})$ a Jacobi-mátrix. Ekkor $f_{\underline{g}(\underline{X})}(\underline{y}) = |\det(J)| \cdot f_{\underline{X}}(\underline{g}^{-1}(\underline{y}))$

Állítás. Legyenek X és Y független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Néhány gyakori transzformált sűrűségfüggvényének előállítása:

$$U = X + Y \qquad f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u-x)\, dx$$

$$U = X - Y \qquad f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u+x)\, dx$$

$$U = X \cdot Y \qquad f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\tfrac{u}{x})\, dx$$

$$U = \frac{X}{Y} \qquad f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(ux)\, dx$$

Definíció. **Kovarianciamátrix.** Legyen $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó. Ekkor $\Sigma := E(\underline{X} \cdot \underline{X}^T) - E(\underline{X})E(\underline{X})^T$

Jel.: $\underline{X} \sim N_n(\underline{m}, \Sigma)$ – X n dimenziós normális eloszlású m várható érték vektorral és $\Sigma > 0$ kovarianciamátrixszal. Ekkor $\underline{X}$ sűrűségfüggvénye: $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\det(\Sigma)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{m})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{m})\right\}$.

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata.
Definíció. **1 valószínűségű konvergencia:**

$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *1 valószínűséggel*, ha $P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\to} X(\omega)\}) = 1$.
Jelölés: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{1 \text{ vsz.}} X$ vagy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} X$ vagy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} X$

Definíció. **sztochasztikus konvergencia:**
$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *sztochasztikusan*, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

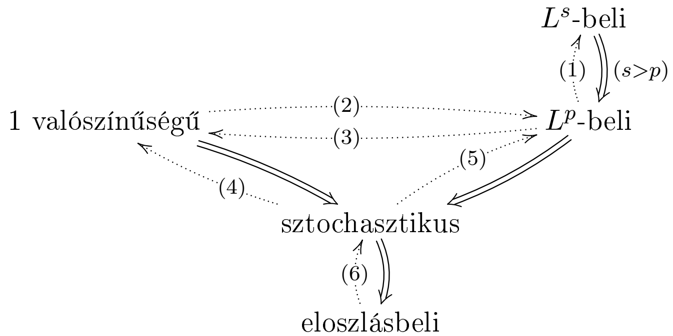
Jelölés: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ vagy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{szt}} X$

Definíció. **eloszlásbeli konvergencia:**
$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *eloszlásban*, ha $F_{X_n}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$ minden x folytonossági pontban.
Jelölés: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ vagy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} X$

Definíció. **L^p-beli konvergencia:**
$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ L^p-*ben*, ha $E\left(|X_n - X|^p\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Jelölés: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$

Jelölés: $X = c$ valószínűségi változó az, aminek eloszlása $P(X = c) = 1$.

A konvergenciák közötti kapcsolatok láthatóak a következő ábrán. A kettős nyilak ($\Rightarrow$) mutatják azt, amikor egyik konvergenciából következik a másik, a szaggatott nyíl pedig azt, amikor az egyikből **nem** következik a másik. A szaggatott nyílon lévő szám az ellenpéldák beazonosítására szolgál.



Ellenpéldák:

Valószínűségi változó sorozat	Mire ellenpélda
$P(X_n = n^{\frac{1}{p+\varepsilon}}) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ ($\varepsilon > 0$ kicsi) és $X = 0$	(1)
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, $\Omega = [0,1]$ $X_n(\omega) = \begin{cases} e^n & \text{ha } \omega \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ és $X = 0$	(2) (5)
$X_n \sim \text{Ind}\left(\frac{1}{n}\right)$ függetlenek és $X = 0$	(3) (4)
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, $\Omega = [0,1]$ $X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ és $X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	(6)

Állítás. Az alábbi állítások ekvivalensek:
(I.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{1 \text{ vsz.}} X$

(II.) $\forall\varepsilon > 0$-ra $P\left(\{\omega : \sup\limits_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(III.) $\sup\limits_{k\geq n}|X_k - X| \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$

(IV.) $\forall\varepsilon > 0$-ra $P\left(\{\omega : \sup\limits_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

(V.) $\forall\varepsilon > 0$-ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_k - X| > \varepsilon) < \infty$

Állítás. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek. Ekkor
$\forall\varepsilon > 0$-ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_k - X| > \varepsilon) = \infty \implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{1 \text{ vsz.}} X$

Tétel. **Cramér-Szluckij lemma.**
Legyenek X_n, Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és X valószínűségi változók, $a \in \mathbb{R}$. Ha $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} a$, akkor
a.) $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X + a$;

b.) $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} aX$.

Definíció. **Komplex értékű valószínűségi változó.**
$Z = X + iY$, ahol X és Y val. változók, $i = \sqrt{-1}$.

Definíció. **Komplex értékű valószínűségi változó várható értéke.**
$EZ = EX + iEY$, ha EX és EY léteznek.

Definíció. **Karakterisztikus függvény.**
Legyen X (valós) val. változó. Ekkor
$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\cos(tx) + i\sin(tx)]\,dF(x)$.
Legyen $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ val. vektorváltozó, $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Ekkor
$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) := E(e^{i\underline{t}^T\underline{X}}) = E\left[\exp\left(i\sum\limits_{k=1}^{n} t_k X_k\right)\right]$.
Megj.: Ha X abszolút folytonos, akkor a karakterisztikus függvény a Fourier-traszformált: $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$

Definíció. **Momentumgeneráló függvény.**
Legyen X (valós) val. változó. Ekkor $M_X(t) := E(e^{tX})$

Definíció. **Laplace-transzformált.**
Legyen X (valós) val. változó. Ekkor $L_X(t) := E(e^{-tX})$

Megj.: Momentumgeneráló függvény, illetve Laplace-transzformált nem mindig létezik.

Állítás. **A karakterisztikus függvény tulajdonságai:**

- mindig létezik
- $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1 \quad \forall\, t$-re
- $\varphi(t)$ egyenletesen folytonos
- X, Y függetlenek $\quad \Rightarrow \quad \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$
- $Y = aX + b \quad \Rightarrow \quad \varphi_Y(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$
- $\varphi(t) \in \mathbb{R}\ \forall\, t$-re $\quad \Longleftrightarrow \quad X$ szimmetrikus eloszlású
- $\varphi^{(2n)}(0) < \infty \quad \Rightarrow \quad EX^{2n} < \infty$

A következő tétel elégséges feltételt ad meg arra, hogy egy függvény karakterisztikus függvény legyen. Ezen kívül is vannak hasonló tételek, de a feltételeiket meglehetősen nehéz ellenőrizni (Bochner-tétel, Hincsin-feltétel).

Tétel. **Pólya-tétel.** Legyen $\varphi(t)$ valós értékű, páros, folytonos függvény, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$ és $\forall\, t > 0$-ra $\varphi(t)$ konvex. Ekkor $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénye egy abszolút folytonos eloszlásnak.

A karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást, így a karakterisztikus függvény segítségével is lehet bennünket érdeklő valószínűségeket számítani. Erről szólnak a most következő inverziós tételek. Itt φ végig az X val. változó karakterisztikus függvényét jelöli.

Tétel.
$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty \quad \Rightarrow \quad X$ abszolút folytonos és $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$,
azaz a sűrűségfüggvény előállítható inverz Fourier-transzformációval.

Tétel. **(Lévy-féle inverziós formula)**
Ha X eloszlásfüggvénye a-ban és b-ben folytonos, akkor
$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt.$

Tétel. **(Inverziós formula)** Tetszőleges a és b valós számokra
$\frac{1}{2\pi} \lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt = P(a < X < b) + \frac{P(X=a)+P(X=b)}{2}.$

Állítás. **Inverziós formula atomok valószínűségére.** Ha X eloszlásfüggvénye nem folytonos a-ban, akkor $P(X = a) = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} e^{-ita} \varphi(t)\, dt.$

A karakterisztikus függvény kitűnő segédeszköz arra, hogy valószínűségi változók sorozatának eloszlásbeli konvergenciáját bizonyítsuk. A következő tétel ezt garantálja.

Tétel. **Folytonossági tétel.** Legyenek F_n-ek eloszlásfüggvények, φ_n-ek a hozzájuk tartozó karakterisztikus függvények.
(I.) $\exists\, F(t)$, hogy $F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$ minden folytonossági pontban $\quad \Rightarrow$
$\exists\, \varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, ami éppen az F-hez tartozó karakterisztikus fv.
(II.) $\exists\, \varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ ÉS φ folytonos 0-ban $\quad \Rightarrow \quad \varphi(t)$ karakterisztikus fv. és a hozzá tartozó F eloszlásfv.-re teljesül, hogy $F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$.

Tétel. **Markov-egyenlőtlenség:** Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, $X \geq 0$ val.változó, $\varepsilon > 0$ tetsz.
Ekkor $\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\varepsilon)}$.
Spec., ha $g(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$

Tétel. **Csebisev-egyenlőtlenség:** $\mathrm{P}(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$.

Következmény. $\mathrm{P}(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$

Következmény. Legyenek $X_i \sim$Ind(p) függetlenek, $Y = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Ekkor
$\mathrm{P}(|Y - EY| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Tétel. **Nagy számok (erős) törvénye (NSZT):**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. valószínűségi változók, $EX_1 = m < \infty$.
Ekkor $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{1 vsz}} m$.
Nagy számok gyenge törvényének hívjuk ezt a tételt, ha a konvergencia sztochasztikus.

Tétel. **Centrális határeloszlás-tétel (CHT):**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, $EX_1 = m$, $D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$.
Ekkor $\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$, azaz
$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \overset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$.
A CHT becslésének hibájáról szól a következő tétel, amelyben a konstans friss, 2012-es eredmény.

Tétel. **Berry-Esséen tétel:**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, $EX_1 = m$, $D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$.
Ekkor $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq 0,4748 \cdot \frac{E|X_1-m|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$.

A CHT-ban lehet gyengíteni a feltételeket: a val. változók vagy ne legyenek azonos eloszlásúak, vagy ne legyenek függetlenek. A továbbiakban az elsőre vonatkozó két tételt fogunk kimondani. Tehát most legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek, jelölje $m_i := EX_i$, $\sigma_i = D^2(X_i) < \infty$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$.

Tétel. **Ljapunov-tétel:**
Legyen $h_i := E|X - m_i|^3 < \infty$, $H_n^3 := h_1 + \ldots + h_n$, amelyekre $\frac{H_n}{B_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ teljesül.
Ekkor $\frac{X_1+\ldots+X_n-(m_1+\ldots+m_n)}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$.

Definíció. **Lindeberg-feltétel:**
Minden $\varepsilon > 0$-ra $L(n,\varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ahol
$L(n,\varepsilon) := \frac{1}{B_n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} E[(X_i - m_i)^2 I(|X_i - m_i| \geq \varepsilon B_n)] =$
$= \frac{1}{B_n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\{x:|x-m_i|\geq\varepsilon B_n\}} (x-m_i)^2 \, dF_i(x)$.

Tétel. **Lindeberg-tétel:**
Ha teljesül a Lindeberg-feltétel, azaz $\forall\varepsilon > 0$-ra $L(n,\varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, akkor $\frac{X_1+\ldots+X_n-(m_1+\ldots+m_n)}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$.

A Lindeberg-tétel a független valószínűségi változókra vonatkozó CHT-k legáltalánosabb verziója. Ennek megfordítása nem igaz, csak amennyiben megkövetelünk egy plusz feltételt.

Tétel. **Lindeberg-tétel megfordítása, Feller-tétel:**
Ha $\frac{X_1+\ldots+X_n-(m_1+\ldots+m_n)}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$ és $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \frac{|X_i-m_i|}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$,
akkor $\forall\varepsilon > 0$-ra $L(n,\varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Legyen a valószínűségi mező a szokásos $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra.

Definíció. **$\mathcal{F}$-mérhetőség.**
Az $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó $\mathcal{F}$-mérhető, ha minden $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel-halmazra $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Definíció. X **feltételes várható értéke $\mathcal{F}$-re nézve.**
Legyen X integrálható. Az $Y := E(X|\mathcal{F})$ az a valószínűségi változó, amelyre egyrészt Y $\mathcal{F}$-mérhető, másrészt $\forall B \in \mathcal{F}$ halmazra $\int\limits_B X\,dP = \int\limits_B Y\,dP$.

Speciálisan, ha $\mathcal{F} = \sigma(Y)$, azaz $\mathcal{F}$-et az Y valószínűségi változó generálja, akkor $E(X|\mathcal{F})$ helyett $E(X|Y)$-t írunk.
Tehát $E(X|Y)$-ra úgy gondolunk, mint egy valószínűségi változóra, konkrétabban az Y valószínűségi változó egy mérhető $h(Y)$ függvényére; és ha Y egy adott értéket vesz fel, azaz ha $E(X|Y = y)$, akkor mint konkrét számra.

Abszolút folytonos eloszlások esetén a következő képlettel számítható:
$$\mathrm{E}(g(X)|Y) = \left. \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx \right|_{y=Y}$$
ahol $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ a feltételes sűrűségfüggvény.

Definíció. **σ-algebrától való függetlenség.**
X valószínűségi változó független az $\mathcal{F}$ σ-algebrától, ha $\forall A \in \sigma(X)$ és $\forall B \in \mathcal{F}$ eseményekre $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Állítás. Tulajdonságok. Legyen g $\mathcal{F}$-mérhető függvény.
- $E(X|\mathcal{F})$ 1 valószínűséggel egyértelműen létezik
- $E(E(X|\mathcal{F})) = EX$ $\rightsquigarrow$ teljes várható érték tétel (TVÉT)
- X $\mathcal{F}$-mérhető $\Rightarrow$ $E[g(X)|\mathcal{F}] = g(X)$
- X független $\mathcal{F}$-től $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{F}) = EX$
- X $\mathcal{F}$-mérhető $\Rightarrow$ $E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$

Állítás. Ha X független $\mathcal{F}$-től, Y mérhető $\mathcal{F}$-re nézve, $g(X,Y)$ integrálható, akkor $E(g(X,Y)|\mathcal{F}) = E(g(X,y))|_{y=Y}$.

Feladat: Y-t szeretnénk közelíteni X tetszőleges függvénye segítségével:
$$E[Y - h(X)]^2 \longrightarrow \min_h \qquad \rightsquigarrow \text{Megoldása: } h_{opt} = E(Y|X)$$

Feladat: Y-t szeretnénk közelíteni X lineáris függvénye segítségével:
$$E[Y - (aX+b)]^2 \longrightarrow \min_{a,b} \qquad \rightsquigarrow \text{Megoldása: } \quad a_{opt} = \frac{Cov(X,Y)}{D^2(X)}$$
$$b_{opt} = EY - a_{opt}EX$$

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$ $\mathcal{A}$-beli σ-algebrák monoton növő sorozata.

Definíció. **Adaptáltság.**
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptált, ha $\forall n$-re X_n $\mathcal{F}_n$-mérhető.

Definíció. **Martingál.**
Az $(X_n, \mathcal{F}_n)$ párt martingálnak nevezzük, ha

1. $\forall n$-re $E(|X_n|) < \infty$
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptált
3. $\forall n$-re $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ $\rightsquigarrow$ martingál-tulajdonság

Ha a 3. tulajdonságban $\geq$ van, akkor **szubmartingál**ról, ha pedig $\leq$ van, akkor **szupermartingál**ról beszélünk.

Állítás. Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, $1 < p < \infty$ és $\sup\limits_n E(|X_n|^p) < \infty$, akkor $(X_n, \mathcal{F}_n)$ egy valószínűséggel konvergens.

Állítás. Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ nemnegatív szupermartingál, akkor $(X_n, \mathcal{F}_n)$ egy valószínűséggel konvergens.

Állítás. Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, és $\sup\limits_n E(|X_n|_+) < \infty$, akkor $(X_n, \mathcal{F}_n)$ egy valószínűséggel konvergens.