

Segédanyag a Valószínűségszámítás 1. (alk.mat.) tantárgyhoz

2016. október 15.

Permutáció: n elem összes lehetséges sorrendje: $n!$

Ismétléses permutáció: n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül k_1, \dots, k_m darab megegyezik: $\frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$

Adott n elem, ebből k darabot kivesszünk.

	Kombináció: a kihúzás sorrendje NEM számít (nem számozottak az elemek)	Variáció: a kihúzás sorrendje számít (számozottak az elemek)
Visszatevés/ismétlés nélkül	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Visszatevéssel/ismétléssel	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Definíció. Véges valószínűségi mező: (Ω, \mathcal{A}, P) hármas, ahol

- $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} = \Omega$: eseménytér; elemei: elemi események
- $\{A, B, \dots\} = \mathcal{A} = 2^\Omega$, ahol $A, B, \dots \subseteq \Omega$: események
- P : valószínűség
 - $P(\Omega) = 1$
 - $P(A) \geq 0$ minden A eseményre
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ minden A és B egymást kizáró ($A \cap B = \emptyset$) es.-re.

Definíció. σ -algebra: Legyen $\Omega \neq \emptyset$ halmaz, $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$. Az \mathcal{A} halmaz σ -algebra, ha

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ (zárt a komplementer képzésre)
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (zárt a megszámlálható unióra)

Definíció. Kolmogorov-féle valószínűségi mező: (Ω, \mathcal{A}, P) hármas, ahol

- Ω : nemüres halmaz
- $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ σ -algebra
- $P: \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ halmazfüggvény, amelyre
 - $P(\Omega) = 1$
 - $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ -ra
 - páronként kizáró $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ eseményekre $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Jelölje az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Lebesgue-mértékét $\lambda(A)$. Ha $n = 1$, akkor a Lebesgue-mérték a hossz, $n = 2$ -nél a terület, $n = 3, 4, \dots$ esetén pedig a térfogat.

Definíció. Geometriai vsz.-i mező: (Ω, \mathcal{A}, P) hármas, ahol:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \lambda(\Omega) < \infty$
- $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \subset \mathbb{R}^n\}$
- $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\text{"kedvező" terület}}{\text{összes terület}}$.

Állítás. Legyenek A és B tetszőleges események. Ekkor

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események és $S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

Tétel. Szita formula vagy Poincaré-formula:

$P(A_1, \dots, A_n$ közül legalább 1 bekövetkezik) $= P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k^{(n)}$

Tétel. Jordán-formula:

$P(A_1, \dots, A_n$ közül pontosan r darab következik be) $= \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^{(n)}$.

Mintavétel: Adott N termék, ezek közül M selejtes. Az összes termékből kivesszünk n darabot. Mi a valószínűsége, hogy ezek között k selejtes lesz? ($k = 0, 1, \dots, n$)

- Visszatevés nélkül: $\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- Visszatevéssel: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ahol $p = \frac{M}{N}$ a selejtarány

Feltételes valószínűség: Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

Definíció. Teljes eseményrendszer (TER): B_1, B_2, \dots események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re,
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Tétel. Teljes valószínűség tétele: Legyen B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer, $P(B_j) > 0$ minden j -re; A tetszőleges esemény.

$$\text{Ekkor } P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

Tétel. Bayes-tétel: Legyen B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer, $P(B_j) > 0$ minden j -re; A tetszőleges esemény, amire $P(A) > 0$.

$$\text{Ekkor } P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Definíció. Események függetlensége: A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva).

Definíció. Események teljes függetlensége: Az A_1, A_2, \dots, A_n események teljesen függetlenek, ha $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ minden $2 \leq k \leq n$ -re és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ -re.

Definíció. Generált σ -algebra: Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$ tetszőleges halmazrendszer. Az \mathcal{F} által generált σ -algebra az a legszűkebb σ -algebra, ami tartalmazza az \mathcal{F} halmazrendszert. Jelölése: $\sigma(\mathcal{F})$

Definíció. \mathbb{R}^d **Borel-halmazai:** \mathbb{R}^d összes nyílt halmaza által generált σ -algebra.
Jelölése: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Definíció. Valószínűségi változó: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazra.

Definíció. Valószínűségi változó eloszlása:

$Q_X(B) \stackrel{\text{Def.}}{=} P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) = P(\omega : X(\omega) \in B)$, ahol $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definíció. Diszkrét val. változó: értékészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, x_2, \dots\}$ elemekből áll. Ekkor eloszlását egyértelműen meghatározzák a $p_i := P(X = x_i) = P(X^{-1}(\{x_i\})) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$ valószínűségek, ahol $i = 1, 2, \dots$

Tétel. Binomiális tétel: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Állítás. Geometriai sor összege: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $1 > |q| \in \mathbb{R}$. Konvergenciatarományon belül "be lehet deriválni" egy végtelen sort, így $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, ha $|q| < 1$.

Definíció. Diszkrét val. változó várható értéke.

Legyen X diszkrét val. vált., ami az x_1, x_2, \dots értékeket veszi fel, p_1, p_2, \dots vsz.-ekkel. Ekkor X várható értéke: $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Definíció. Diszkrét val. változó l . momentuma: $EX^l = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^l p_i$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Definíció. X szórásnégyzete: $D^2X \stackrel{\text{Def.}}{=} E[(X - EX)^2] \stackrel{\text{All.}}{=} EX^2 - E^2X$.

Definíció. X szórása: $DX = \sqrt{D^2X}$.

Nevezetes diszkrét eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D^2X
Indikátor (karakterisztikus, Bernoulli)	$\text{Ind}(p)$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Hipergeometriai	$\text{Hipegeo}(N, M, n)$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k = 0, 1, \dots, \min(n, M)$	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) (1 - \frac{n-1}{N-1})$
Binomiális	$\text{Bin}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
Geometriai (Pascal)	$\text{Geo}(p)$	$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ $k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negatív binomiális	$\text{NegBin}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ $k = n, n+1, \dots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	$\text{Poi}(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $k=0, 1, \dots$	λ	λ

Előfordulásuk:

- Indikátor: egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem
- Hipergeometriai: visszavetés nélküli mintavételnél a selejtesek száma
- Binomiális: visszavetéses mintavételnél a selejtesek száma; vagy független kísérleteknél a sikeresek száma, ha $p = P(\text{az } i. \text{ kísérlet sikeres})$

- Geometriai: hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény
- Negatív binomiális: hányadikra következik be n . alkalommal egy p vsz.-ű es.
- Poisson: ritka események bekövetkezésének modellezésére használják

Állítás. Legyenek X, Y, X_1, \dots, X_n val. vált.-k véges várható értékkel; $a, a_i, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $E(aX + bY) = aEX + bEY$
- $E \sum_{i=1}^n a_i X_i = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$
- $D^2(aX + b) = a^2 D^2X$

Definíció. X val. vált. eloszlásfüggvénye: $F_X(x) \stackrel{\text{Def.}}{=} P(X < x) = P(X \in (-\infty, x))$.
Ha egyértelmű, melyik val. változó eloszlásfüggvényéről van szó, $F(x)$ -et írunk.

Állítás. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- monoton növekvő
- balról folytonos
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$

Állítás. Tetszőleges X valószínűségi változó esetén

- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b+) - F(a+)$

Definíció. Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Ilyenkor $f(x)$ -et **sűrűségfüggvénynek** hívjuk.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Egyenletes	$E(a, b)$	$\begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Standard normális	$N(0, 1^2)$	$\Phi(x) = \dots$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$	0	1
Normális	$N(m, \sigma^2)$	\dots	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
Exponenciális	$\text{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$\Gamma(\alpha, \lambda)$	\dots	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Állítás. Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- $f(x) = F'(x)$ (ahol F deriválható)
- $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$

Definíció. Abszolút folytonos val. változó várható értéke: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$.

Definíció. Abszolút folytonos val. változó l . momentuma: $EX^l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x) dx$.

Állítás. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Állítás. $\Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1 - q) \quad 0 < q < 1$

Definíció. Szemifaktoriális: $n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 & \text{ha } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ páros} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 & \text{ha } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ páratlan} \end{cases}$

Állítás. Legyen $X \sim N(0, 1)$. Ekkor $EX^n = \begin{cases} (n-1)!! & \text{ha } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ páratlan} \end{cases}$

Tétel. Teljes várható érték tétel: Legyen B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer, $P(B_j) > 0$ minden j -re; X egy valószínűségi változó.

Ekkor $EX = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|B_i)P(B_i)$, ahol

$E(X|B_i)$: X várható értéke akkor, ha B_i esemény bekövetkezett.

Jelölés. Ha X_1, X_2, \dots egymástól független és azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor röviden azt mondjuk, hogy ezek **i.i.d.** (kiejtve "ájájdí") val. változók – az angol independent, identically distributed rövidítésből származik.

Állítás. Véletlen tagszámú összeg várható értéke és szórása.

Legyenek X_1, X_2, \dots i.i.d., véges szórású val. változók; N nemnegatív egész, X_i -ktől független és véges szórású val. változó. Legyen $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Ekkor

- $EY = EX_1 \cdot EN \rightsquigarrow$ **Wald-lemma**
- $D^2Y = D^2X_1 \cdot EN + E^2X_1 \cdot D^2N$

Állítás. Valószínűségi változó függvényének várható értéke.

Legyen X valószínűségi változó; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

- $E(g(X)) = \sum_k g(x_k)p_k$, ha X diszkrét
- $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$, ha X abszolút folytonos

Mindkét esetben a várható érték létezéséhez a szumma/integrál abszolút konvergenciájára van szükség.

Állítás. Abszolút folytonos val.változó szigorúan monoton függvényének eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

Legyen X abszolút folytonos val. változó; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény. Ekkor

- $Y = g(X)$ eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = F_{g(X)}(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha } g \text{ szigorúan monoton növő} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha } g \text{ szigorúan monoton csökkenő} \end{cases}$$

- $Y = g(X)$ sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |[g^{-1}(y)]'| = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

Megjegyzés. Ha g nem monoton, akkor vigyázni kell, javasolt először az eloszlásfüggvényt kiszámolni, utána pedig deriválással megkapjuk a sűrűségfüggvényt. A nehéz lépés annak a megdölgölása, hogy a $g(X) < y$ esetén mit tudunk az X -ről, hogyan tudjuk ezt X -re rendezni, és hogyan transzformálódik az a halmaz, ahol a sűrűségfüggvény nem volt 0.

Állítás. Normálás/standardizálás: Legyen X tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor az $Y = \frac{X-EX}{DX}$ valószínűségi változó várható értéke 0 és szórása 1.

Állítás. Legyen $X \sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Definíció. Valószínűségi változók konvolúciója: Legyenek X és Y független valószínűségi változók. X és Y konvolúciójának az $U = X + Y$ val. változót nevezzük.

Állítás. A konvolúció meghatározása.

- Diszkrét, nemnegatív egész eset: $P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(X = l) \cdot P(Y = k - l)$
- Folytonos eset: $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(z - u)du$

Állítás. Legyenek X_1, \dots, X_n, X és Y független val. változók

- $X_1 \sim \text{Ind}(p), \dots, X_n \sim \text{Ind}(p) \Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$
- $X \sim \text{Bin}(n, p), Y \sim \text{Bin}(m, p) \Rightarrow X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$
- $X_1 \sim \text{Geo}(p), \dots, X_n \sim \text{Geo}(p) \Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim \text{NegBin}(n, p)$
- $X \sim \text{NegBin}(n, p), Y \sim \text{NegBin}(m, p) \Rightarrow X + Y \sim \text{NegBin}(n + m, p)$
- $X \sim \text{Poi}(\lambda_1), Y \sim \text{Poi}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2), Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda), Y \sim \Gamma(\beta, \lambda) \Rightarrow X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$

Definíció. Valószínűségi vektorváltozó: $\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazra.

Definíció. Valószínűségi vektorváltozó eloszlása:

$Q_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) = P(\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B)$, ahol $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Definíció. \mathbf{X} valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye:

$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{Def}}{=} P(\mathbf{X} < \mathbf{x}) = P(X_1 < x_1, \dots, X_d < x_d) = P(X_1 \in (-\infty, x_1), \dots, X_d \in (-\infty, x_d))$

Állítás. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- $\lim_{x_1, \dots, x_d \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = 1$ és $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = 0$ minden i -re
- minden koordinátájában monoton növő
- minden koordinátájában balról folytonos
- $0 \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leq 1$

Állítás. Tetszőleges X és Y valószínűségi változók esetén
 $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$

Definíció. \mathbf{X} valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos, ha létezik olyan $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d)$ függvény, amelyre $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d$.

Ilyenkor $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ -et **sűrűségfüggvénynek** hívjuk.

Mostantól $d = 2$ lesz, és a következő jelöléseket és elnevezéseket használjuk:

- $F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y) \rightsquigarrow$ együttes eloszlásfüggvény
- $F_X(x) = P(X < x)$ \rightsquigarrow peremeloszlásfüggvények
- $F_Y(y) = P(Y < y)$
- $f_{X,Y}(x, y) \rightsquigarrow$ együttes sűrűségfüggvény
- $f_X(x), f_Y(y) \rightsquigarrow$ peremsűrűségfüggvények

Állítás. Az együttes és a peremeloszlás és -sűrűségfüggvények tulajdonságai.

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y)$ és $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y)$
- $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) dudv$
- $f_{X,Y}(x, y) = \partial_y \partial_x F_{X,Y}(x, y) = \partial_x \partial_y F_{X,Y}(x, y)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$ és $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$
- $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(u, v) dudv$

Definíció. Valószínűségi változó által generált σ -algebra:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{\omega : X(\omega) \in B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Definíció. Valószínűségi változók függetlensége. X és Y függetlenek egymástól, ha minden $A \in \sigma(X)$ és minden $B \in \sigma(Y)$ -ra $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Állítás. Valószínűségi változók függetlenségének karakterizációi.

- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ (tetsz. X, Y esetén)
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (ha X, Y absz. folyt.)
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$ (ha X, Y diszkrét)
- X, Y függetlenek $\Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY$ (tetsz. véges várható értékű X, Y esetén)

Definíció. X és Y kovarianciája: $\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$.

Köv.: $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY$.

Definíció. Ha $\text{cov}(X, Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy X és Y **korrelálatlanok**.

Állítás. A kovariancia tulajdonságai. Legyenek $X, Y, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ véges szórású valószínűségi változók, $a, b, a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\text{cov}(X, X) = D^2 X$
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(X, a) = 0$
- $\text{cov}(aX, bY) = a \cdot b \cdot \text{cov}(X, Y)$

- $\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot b_j \cdot \text{cov}(X_i, Y_j)$
- $D^2(X + Y) = D^2 X + D^2 Y + 2 \text{cov}(X, Y)$
- $D^2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D^2 X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

Állítás. A függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata.

- Ha X és Y függetlenek egymástól, akkor korrelálatlanok.
- Ha X és Y korrelálatlanok, akkor ebből **neem** következik, hogy függetlenek!!4!4!!

Definíció. X és Y **korrelációja:** $R(X, Y) = \begin{cases} \frac{\text{cov}(X, Y)}{DXDY} & \text{ha } DX \neq 0 \text{ és } DY \neq 0 \\ 0 & \text{ha } DX = 0 \text{ vagy } DY = 0 \end{cases}$

A korreláció két valószínűségi változó lineáris kapcsolatát méri: ha

- $R > 0 \Rightarrow$ pozitív a kapcsolat és $R^2 \sim 1 \Rightarrow$ erős a kapcsolat
- $R < 0 \Rightarrow$ negatív a kapcsolat és $R^2 \sim 0.5 \Rightarrow$ közepes a kapcsolat
- $R^2 \sim 0 \Rightarrow$ gyenge a kapcsolat

Állítás. A korreláció tulajdonságai.

Legyenek X és Y véges szórású valószínűségi változók. Ekkor

- $|R(X, Y)| \leq 1$
- $|R(X, Y)| = 1$ akkor és csak akkor, ha Y 1 valószínűséggel lineáris függvénye X -nek, azaz léteznek olyan a és b valós számok, hogy $P(Y = aX + b) = 1$.

Tétel. Markov-egyenlőtlenség: Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény, $X \geq 0$ val. változó, $\varepsilon > 0$ tetsz. Ekkor $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\varepsilon)}$.

Speciálisan, ha $g(x) = x \Rightarrow P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$

Tétel. Csebisev-egyenlőtlenség: $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$.

Következmény. $P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$

Legyen X_1, X_2, \dots valószínűségi változók sorozata.

Definíció. 1 valószínűségű konvergencia:

$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ 1 valószínűséggel, ha $P(\{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\}) = 1$.

Definíció. sztochasztikus konvergencia:

$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ sztochasztikusan, ha $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Tétel. Nagy számok (erős) törvénye (NSZT):

Legyenek X_1, X_2, \dots i.i.d. val. változók, $EX_1 = m < \infty$.

Ekkor $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$ 1 valószínűséggel.

Nagy számok gyenge törvényének hívjuk ezt a tételt, ha a konvergencia sztochasztikus.

Tétel. Centrális határeloszlás tétel (CHT):

Legyenek X_1, X_2, \dots i.i.d. val. változók, $EX_1 = m, D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Ekkor

$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$ eloszlásban, azaz $P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma}} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x)$.
