Segédanyag a Matematikai statisztika tantárgyhoz

2020. december 3.

Leíró statisztika

Statisztikai **sokaság**: a megfigyelés tárgyát képező egyedek összessége, halmaza. Röviden sokaságnak hívjuk.
A sokaság egysége: a sokaság egy eleme.

Statisztikai **ismérv** (röv.: ismérv): a sokaság egyedeit jellemző tulajdonság.
Az ismérvek típusai:

- minőségi ismérv: az egyedek számszerűen nem mérhető tulajdonsága
- mennyiségi ismérv: az egyedek számszerűen mérhető tulajdonsága. Két fajtájukat különböztetjük meg:
  - diszkrét: véges vagy megszámlálhatóan sok értéket vehet fel
  - folytonos: egy adott intervallumon belül kontinuum számosságú értéket felvehet
- időbeli ismérv: az egységek időbeli elhelyezésére szolgáló rendezőelvek
- területi ismérv: az egységek térbeli elhelyezésére szolgáló rendezőelvek

Mérési szintek:

- Névleges (nominális) mérési skála: a számok csak ún. kódszámok, amik a sokaság egyedeinek azonosítására szolgálnak. Ezek között matematikai relációkat és műveleteket nincs értelme végezni. Pl. a hallgatók neme.
- Sorrendi (ordinális) skála: a sokaság egyedeinek valamely tulajdonság alapján sorba való rendezése. Pl. a hallgatók jegyei egy tárgyból.
- Intervallumskála (különbségi skála): a skálaértékek különbségei is valós információt adnak a sokaság egyedeiről. A skálán a nullpont meghatározása önkényes. Ilyen skálákhoz mértékegység is tartozik. Pl. hőmérséklet.
- Arányskála: a skálának van valódi nullpontja is. Minden matematikai művelet elvégezhető ezekkel a számokkal. Pl. a hallgatók magassága.

Tipikusan a minőségi ismérvek mérési szintje nominális, esetleg sorrendi skála; a mennyiségi ismérvek mérési szintje különbségi vagy arányskála; a területi ismérvek mérési szintje nominális skála; az időbeli ismérveké pedig különbségi skála.
Néha az intervallum- vagy arányskálán mérhető tulajdonságokat *metrikus ismérv*eknek nevezik.

Statisztikai tábla a statisztikai sorok összefüggő rendszere.
A statisztikai táblák fajtái:

- Egyszerű tábla: nincs benne összegző sor
- Csoportosító tábla: egyetlen összegző sort tartalmaz
- Kombinációs vagy *kontingenciatábla*: legalább két összegző sort tartalmaz

A statisztikai elemzések egyik legfontosabb eszközei a viszonyszámok. A **viszonyszám** két statisztikai adat hányadosa. Jelölések: $V = \frac{A}{B}$, ahol
V: viszonyszám; A: a viszonyítás tárgya; B: a viszonyítás alapja.

A viszonyszámok fajtái:

- Megoszlási: a sokaság egy részét a sokaság egészéhez viszonyítjuk.
- Koordinációs: a sokaság egy részének a sokaság egy másik részéhez való viszonyítása.
- Dinamikus: két időpont vagy időszak adatának hányadosa.
- Intenzitási: különböző fajta adatok viszonyítása egymáshoz; gyakran a mértékegységük is eltérő.

Ha egy teljes sokaságra és annak m részére rendelkezésre áll a viszonyszám alapja és részei, akkor a viszonyszámokat ki tudjuk számolni a teljes sokaságra (jel. $\overline{V}$, ezt *összetett viszonyszám*nak hívják) és annak részeire is (jel. $V_1, \dots, V_m$). Ekkor a teljes sokaságra számolt viszonyszám kiszámítási lehetőségei:

$$\overline{V} = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i}{\sum_{i=1}^{m} B_i} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{m} B_i V_i}{\sum_{i=1}^{m} B_i}}_{\substack{\text{súlyozott} \\ \text{számtani átlag}}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{m} A_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{V_i}}}_{\substack{\text{súlyozott} \\ \text{harmonikus átlag}}}$$

A leíró statisztikai szakirodalomban az i indexeket – pongyola módon – le szokták hagyni:

$$\overline{V} = \frac{\sum A}{\sum B} = \frac{\sum BV}{\sum B} = \frac{\sum A}{\sum \frac{A}{V}}$$

Definíció. **z-kvantilis:** $q(z) = q_z = \inf\{x : F(x) \geq z\}$, és amennyiben F invertálható, akkor $q_z = F^{-1}(z)$-re egyszerűsödik $(0 < z < 1)$
Fontos speciális kvantilisek: kvartilisek:

- $Q_1 := q_{\frac{1}{4}} \rightsquigarrow$ alsó kvartilis
- $Q_2 = Me := q_{\frac{1}{2}} \rightsquigarrow$ **medián** (középső mintaelem)
- $Q_3 := q_{\frac{3}{4}} \rightsquigarrow$ felső kvartilis

Definíció. **Módusz:** abszolút folytonos eloszlás esetén a sűrűségfüggvény maximumhelye(i), diszkrét eloszlás esetén pedig az eloszlás maximumhelye(i). Tehát

- Mo$= \operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, ha X abszolút folytonos;
- Mo$= \operatorname{argmax}_{x_1, x_2, \dots} P(X = x_i)$, ha X diszkrét.

Nem biztos, hogy létezik, és ha létezik, akkor se biztos, hogy egyértelmű.

Definíció. **Ferdeség (skewness):** $\operatorname{skew}(X) = \frac{E(X-EX)^3}{(DX)^3}$

Értelmezése:
- skew(X)=0 $\Rightarrow$ az eloszlás szimmetrikus
- skew(X)>0 $\Rightarrow$ az eloszlás balra ferdült
- skew(X)<0 $\Rightarrow$ az eloszlás jobbra ferdült

Definíció. **Csúcsosság (kurtosis):** $\text{kurt}(X) = \frac{E(X-EX)^4}{(DX)^4} - 3$

Értelmezés:
- kurt(X)=0 $\Rightarrow$ az eloszlás csúcsossága a standard normáliséval megegyező
- kurt(X)<0 $\Rightarrow$ az eloszlás laposabb a st. norm.-nál
- kurt(X)>0 $\Rightarrow$ az eloszlás csúcsosabb a st. norm.-nál

Minta: $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változó sorozat, jel. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$
A továbbiakban feltesszük, hogy függetlenek és azonos eloszlásúak – ezt röviden *i.i.d. mintá*nak hívjuk (independent, identically distributed).
Az elméleti értékeket nagy, a konkrét, realizált mintából számolt értékeket mindig kis betű fogja jelölni, azaz minta esetén $x_1, ..., x_n$.

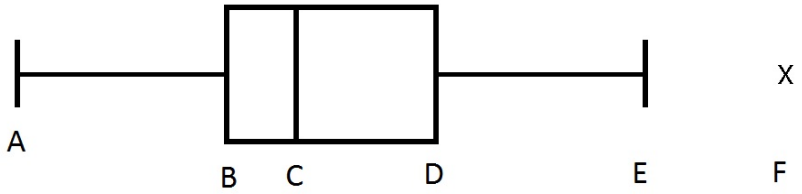
Statisztika: a minta valamely függvénye: $T : \mathbf{X} \mapsto ...$
Becslés: a minta eloszlásának ismeretlen paraméterét közelíti a minta segítségével.
Megj.: Minden becslés statisztika.

Néhány lényeges statisztika:

- *Rendezett minta*: $X_1^* \leq ... \leq X_n^*$ nem csökkenő sorrendbe tesszük a mintaelemeket
- *Terjedelem*: $R = X_n^* - X_1^*$ (R=range)
- *Mintaátlag*: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
- *Tapasztalati szórás*: $S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}}$
  Értelmezése: az átlagtól való átlagos eltérés abszolút mértékegységben
- *Korrigált tapasztalati szórás*: $S_n^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}}$
- *Szórási együttható*: $V = \frac{S_n}{\overline{X}}$
  Értelmezése: az átlagtól való átlagos eltérés százalékban
  Megj.: relatív szórásnak is hívják
- *Tapasztalati eloszlásfüggvény*: $F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i<x)}{n}$
  ahol $I(X_i < x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_i < x \\ 0 & \text{ha } X_i \geq x \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ karakterisztikus függvény
- *Tapasztalati z-kvantilis*: Realizált mintából sokféleképpen számolható, interpolációs módszer:
  1.) Sorszám megállapítása: $(n+1)z = e + t$ (e: egészrész, t: törtrész)
  2.) $q_z = x_e^* + t(x_{e+1}^* - x_e^*)$
  Értelmezése: a mintaelemek z-ed része legfeljebb a q_z értéket veszi fel, $(1-z)$-ed része pedig legalább q_z.
- *Interkvartilis terjedelem*: $IQR = Q_3 - Q_1$
- *Tapasztalati módusz*: a legtöbbször előforduló érték.
  Értelmezése: a minta tipikus, leggyakrabban előforduló értéke.
- *Tapasztalati ferdeség*: $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^3}{S_n^3}$
- *Tapasztalati csúcsosság*: $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^4}{S_n^4} - 3$

Tétel. **(Glivenko-Cantelli)** A tapasztalati eloszlásfüggvény 1 valószínűséggel egyenletesen tart a valódi eloszlásfüggvényhez, formálisan $P\left(\lim\sup_{n\to\infty, x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1.$

Boxplot ábra: (ez fekvő, de lehet álló is)
ahol a betűk a következő értékeket jelentik:



- $A = \max\{x_1^*, Q_1 - 1,5 \cdot IQR\}$;
- $B = Q_1$;
- $C = Me$;
- $D = Q_3$;
- $E = \min\{x_n^*, Q_3 + 1,5 \cdot IQR\}$;
- F: kieső értékek, azokat tüntetjük fel pontokként, amik A-n vagy E-n kívülre esnek.

Az adatelemzés lépései:
- Adathibák keresése, irreális adatok, értékek törlése; esetleg korrigálása
- Alkalmas osztályközös gyakorisági sor készítése
- Középértékek kiszámítása
  - Átlag (számtani vagy mértani – amelyiknek értelme van)
  - Helyzeti középértékek: módusz és medián
- Szóródási mutatók kiszámítása
  - Terjedelem és interkvartilis terjedelem
  - Szórás és relatív szórás
- Alakmutatók kiszámítása

  - Ferdeség
  - Csúcsosság
- Ábrák készítése:
  - Sűrűséghisztogram
  - Boxplot ábra

Nevezetes diszkrét eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D^2X
Karakterisztikus (indikátorvált.)	Ind(p)	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Geometriai (Pascal)	Geo(p)	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $k=1,2,\dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeometriai	Hipgeo(N,M,n)	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k=0,1,\dots,n$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$
Binomiális	Bin(n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
Negatív binomiális	NegBin(n,p)	$P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ $k=n,n+1,\dots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	Poi(λ)	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,\dots$	λ	λ

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Egyenletes	E(a,b)	$\begin{cases}0 & \text{ha } x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 1 & \text{ha } b<x\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	Exp(λ)	$\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Standard norm.	N($0,1^2$)	$\Phi(x)=\dots$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad x\in\mathbb{R}$	0	1
Normális	N(m,σ^2)	…	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\quad x\in\mathbb{R}$	m	σ^2

További nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Cauchy	$Cauchy(a,b)$ $a\in\mathbb{R}, b>0$	$\frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]}\quad x\in\mathbb{R}$	$\nexists$	$\nexists$
Pareto*	$Pareto(\alpha,\beta)$ $\alpha,\beta>0$	$\begin{cases}1-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} & \text{ha } x\ge\beta\\ 0 & \text{ha } x<\beta\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{ha } x\ge\beta\\ 0 & \text{ha } x<\beta\end{cases}$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$	$\frac{\beta^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

* A Pareto-eloszlásnak akkor van véges várható értéke a képletnek megfelelően, ha $\alpha>1$, szórásnégyzete pedig akkor, ha $\alpha>2$.

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlás-függvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Khí-négyzet	$\chi^2_k\quad k\in\mathbb{N}$	…	$\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}\quad x\in\mathbb{R}$	k	$2k$
Gamma	$\Gamma(\alpha,\lambda)\quad \alpha,\lambda>0$	…	$\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}x^{\alpha-1} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{ha } x<0\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Béta	$Beta(\alpha,\beta)$ $\alpha,\beta>0$	…	$\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & x\in[0;1]\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Lognormális	LN(m,σ^2) $m\in\mathbb{R},\sigma>0$	…	$\begin{cases}\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\log x-m)^2}{2\sigma^2}} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{ha } x<0\end{cases}$	$e^{m+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2-1})e^{2m+\sigma^2}$

Matematikai statisztika – becsléselmélet

Most belekezdünk a matematikai statisztikába, a korábbi minta fogalma egy fokkal absztraktabb formában fog visszaköszönni.

Definíció. **Statisztikai mező.** $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ hármas, ahol $\mathcal{P}$ pedig eloszlások egy családja és minden $P\in\mathcal{P}$-re $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező.
$\mathcal{P}$-t gyakran paraméresen adjuk meg: $\mathcal{P}=\{P_\vartheta:\ \vartheta\in\Theta\}$, ahol $\Theta\subseteq\mathbb{R}^p$ összefüggő és nyílt halmaz, amit **paramétertér**nek hívunk.

Definíció. **Minta.** $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A})\longrightarrow\mathcal{X}$ leképezés, ahol $\mathcal{X}$ neve: **mintatér**.

Feladat: annak a meghatározása, hogy a $\mathcal{P}$ eloszláscsalád melyik tagja írja le legjobban a valóságot, a vizsgált jelenséget. Ennek érdekében veszünk mintát. Erőfeszítéseink jelentős része arra fog irányulni, hogy a valamilyen szempontból "legjobb" P-t vagy paraméteres esetben ezzel ekvivalens módon, a "legjobb" ϑ paramétert megtaláljuk.
Jelölés. A továbbiakban a valószínűség, sűrűségfüggvény, várható érték és szórás(mátrix) alsó indexben lévő ϑ arra fog utalni, hogy egy paraméteres statisztikai mező van a feladat hátterében és ϑ-val jelöljük az ismeretlen, de érdeklődésünk középpontjában lévő paramétert.

Definíció. **Likelihood függvény:** Legyen $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ i.i.d. minta

- $L(\vartheta;\mathbf{x})=f_\vartheta(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n}f_\vartheta(x_i)$, ha az eloszlás folytonos
- $L(\vartheta;\mathbf{x})=P_\vartheta(\mathbf{X}=\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n}P_\vartheta(X_i=x_i)$, ha az eloszlás diszkrét

Definíció. **Log-likelihood függvény:** $l(\vartheta;\mathbf{x})=\log L(\vartheta;\mathbf{x})$

Legyen $g:\Theta\to\mathbb{R}^k$ függvény. Célunk az $\mathbf{X}$ minta alapján $g(\vartheta)$ becslése.

Definíció. **Torzítatlan becslés.** $T(\mathbf{X})$ statisztika torzítatlan becslése $g(\vartheta)$-nak, ha $E_\vartheta T(\mathbf{X})=g(\vartheta)\quad\forall\vartheta\in\Theta$-ra.

Definíció. **Torzítás (bias).** $b_T(\vartheta) = E_\vartheta T(\mathbf{X}) - g(\vartheta)$

Definíció. Legyenek $T_1(\mathbf{X})$ és $T_2(\mathbf{X})$ torzítatlan becslései $g(\vartheta)$-nak. Ekkor azt mondjuk, hogy $T_1(\mathbf{X})$ **hatásosabb** $T_2(\mathbf{X})$-nél, ha $D^2_\vartheta(T_1(\mathbf{X})) \leq D^2_\vartheta(T_2(\mathbf{X}))$ minden $\vartheta \in \Theta$ esetén.

Definíció. **Hatásos becslés.** A $T(\mathbf{X})$ torzítatlan becslést hatásosnak nevezzük, ha minden torzítatlan becslésnél hatásosabb.

Tétel. **A hatásos becslés egyértelműsége.**
Ha $T_1(\mathbf{X})$ és $T_2(\mathbf{X})$ hatásos becslései $g(\vartheta)$-nak, akkor minden paraméterértékre 1 valószínűséggel megegyeznek, azaz $P_\vartheta(T_1(\mathbf{X}) = T_2(\mathbf{X})) = 1 \ \ \forall \vartheta \in \Theta$ esetén.

Megjegyzés. Egy becslésről nem egyszerű belátni, hogy hatásos. Hatásos becslés keresésének alapja a Blackwell-Rao tétel.

Definíció. **Aszimptotikus torzítatlanság.** A $T_n(\mathbf{X})$ becsléssorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ aszimptotikusan torzítatlan becslése a $g(\vartheta)$-nak, ha $E_\vartheta T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{n\to\infty} g(\vartheta)$ $\forall \vartheta \in \Theta$ esetén.

Definíció. **Gyenge konzisztencia.** A $T_n(\mathbf{X})$ becsléssorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ gyengén konzisztens becslése a $g(\vartheta)$-nak , ha $T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} g(\vartheta) \ \ \forall \vartheta \in \Theta$ esetén.

Tétel. **Elégséges feltétel gyenge konzisztenciára.**
Ha $E_\vartheta T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{n\to\infty} g(\vartheta)$ és $D^2_\vartheta T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, akkor T_n becsléssorozat gyengén konzisztens becslése $g(\vartheta)$-nak.

Definíció. **Erős konzisztencia.** A $T_n(\mathbf{X})$ becsléssorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ erősen konzisztens becslése a $g(\vartheta)$-nak, ha $T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{1 \text{ vsz.}} g(\vartheta) \ \ \forall \vartheta \in \Theta$ esetén.

Állítás.

- A tapasztalati eloszlásfüggvény torzítatlan és erősen konzisztens becslése az eloszlásfüggvénynek.
- A mintaátlag torzítatlan és erősen konzisztens becslése a várható értéknek.
- A tapasztalati szórásnégyzet *torzított*, de aszimptotikusan torzítatlan és erősen konzisztens becslése a szórásnégyzetnek.
- A tapasztalati szórásnégyzet torzítatlan és erősen konzisztens becslése a korrigált szórásnégyzetnek.

A sűrűségfüggvény becslése nem triviális probléma, két módszer erre:

- Hisztogram (sűrűséghisztogram)
- Parzen-Rosenblatt becslés

A sűrűségfüggvény becslése magfüggvény segítségével n elemű mintából:

Parzen-Rosenblatt becslés: $f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$, ahol

- h_n alkalmas 0-hoz tartó sorozat, ami a mintapont körüli intervallum hossza felének felel meg
- $K(x)$ az úgynevezett magfüggvény; a leggyakrabban a Gauss-féle magfüggvényt használjuk, ami $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

A Parzen-Rosenblatt becslés

Tétel. **A Parzen-Rosenblatt becslés konzisztenciája.** Alkalmas feltételek esetén h_n-re és a K magfüggvényre, az $f_n(x)$ Parzen-Rosenblatt becslés aszimptotikusan torzítatlan és erősen konzisztens becslése a valódi sűrűségfüggvénynek.

Paraméterbecslési módszerek

- **Maximum likelihood módszer (ML-módszer):** Azt a paraméterértéket keressük, ahol a likelihood fv. a legnagyobb értéket veszi fel: $\max_\vartheta L(\vartheta; \mathbf{x})$
  Amennyiben a függvény deriválható ϑ szerint, akkor a maximumot kereshetjük a szokásos módon, az első és második deriváltak segítségével, azonban a feladatunkat jelentősen megnehezíti, hogy olyan n-szeres szorzatot kellene deriválni, amelyiknek minden tagjában ott van az a változó, ami szerint deriválnunk kellene. Ezért likelihood függvény helyett a log-likelihood függvény maximumhelyét keressük.
- **Momentum módszer:** A mintából számítható tapasztalati momentumokat ($m_i := \frac{\sum_j x_j^i}{n}$) egyenlővé tesszük az elméleti momentumokkal ($M_i(\vartheta) := E_\vartheta X^i$), az elsőtől kezdve, mégpedig annyit, amennyi paraméter van. Tehát p darab ismeretlen paraméter esetén a következő p ismeretlenes egyenletrendszert oldjuk meg:
  $$M_1(\vartheta) = m_1$$
  $$\vdots$$
  $$M_p(\vartheta) = m_p$$
  Megjegyzés: $m_1 = \overline{x}$

Fisher-tétel: Ha ϑ ML-becslése $\hat{\vartheta}$, akkor tetszőleges g függvény esetén $g(\vartheta)$ ML-becslése $g(\hat{\vartheta})$.

Definíció. **Elégséges statisztika.**
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, $\mathbf{X}$ minta, $B \in \mathcal{A}$. A T statisztikát **elégséges statisztiká**nak nevezzük, ha a $P_\vartheta(\mathbf{X} \in B | T(\mathbf{X}))$ feltételes eloszlásnak létezik ϑ-tól nem függő változata.
Megjegyzés. Ez egy elég absztrakt fogalom. Elégséges statisztikát a Neyman-féle faktorizációs tétel segítségével (kicsit lejjebb) tudunk keresni és arra lesz jó, hogy segítségével bizonyos szempontból optimális becslést találjunk.
Megjegyzés. az elégséges statisztika minden lényeges információt tartalmaz az ismeretlen ϑ paraméterre vonatkozóan.

Tétel. **Neyman-féle faktorizációs tétel.**

"Szép" statisztikai mezőn a T statisztika akkor és csak akkor elégséges, ha léteznek olyan g_ϑ nemnegatív és h függvények, hogy $L(\vartheta;\mathbf{x}) = g_\vartheta(T(\mathbf{x}))\cdot h(\mathbf{x}) \quad \forall \vartheta\in\Theta$ és λ-m.m. $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$ esetén.

Állítás. A $T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^*$ rendezett minta elégséges statisztika.
Ebben a részben tegyük fel, hogy a paramétertér 1 dimenziós.

Definíció. **Fisher-információ.**
Tegyük fel, hogy a log-likelihood függvény ϑ szerint deriválható. Ekkor az $\mathbf{X}$ n elemű mintában lévő Fisher-információ: $I_{\mathbf{X}}(\vartheta) \equiv I_n(\vartheta) = E_\vartheta\left([\partial_\vartheta l(\vartheta;\mathbf{X})]^2\right)$.

Megj.: $I_{\mathbf{X}}(\vartheta)$ azt az (absztrakt) információmennyiséget méri, amelyet az $\mathbf{X}$ minta a paraméterre vonatkozóan magában hordoz.
A Fisher-információ kiszámítása bizonyos, úgynevezett regularitási feltételek esetén egyszerűbbé válik.

Definíció. **1. regularitási feltétel.** $E_\vartheta(\partial_\vartheta l(\vartheta,\mathbf{X})) = \mathbf{0}$

Állítás. $E_\vartheta(\partial_\vartheta l(\vartheta,\mathbf{X})) = \mathbf{0} \iff \partial_\vartheta \int\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f_\vartheta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \partial_\vartheta f_\vartheta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, azaz "be lehet deriválni" az integráljel mögé.

Állítás. Ha teljesül az 1. regularitási feltétel, akkor a Fisher-információt kiszámolhatjuk az alábbi módon: $I_n(\vartheta) = n\cdot I_1(\vartheta) = n\cdot D^2_\vartheta \partial_\vartheta l(\vartheta, X_1)$.

Tétel. **Cramér-Rao egyenlőtlenség.**
Tegyük fel, hogy $T(\mathbf{X})$ statisztika torzítatlan becslése $g(\vartheta)$-nak és teljesül az 1. regularitási feltétel. Ekkor minden $\vartheta\in\Theta$-ra $D^2_\vartheta(T(\mathbf{X})) \geq \underbrace{\frac{(g'(\vartheta))^2}{I_n(\vartheta)}}_{\text{információs határ}}$.

Megjegyzés. Ha minden ϑ-ra egyenlőség teljesül a Cramér-Rao egyenlőtlenségben, akkor T hatásos becslés. Ennek az egyenlőtlenségnek a vizsgálata tehát lehetőséget ad arra, hogy blackwellizálás nélkül hatásos becslést találjunk.

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy a statisztika szórásnégyzete nagyobb az információs határnál, viszont a statisztika hatásos. Példa erre i.i.d. exponenciális mintánál az $\frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$ statisztika.

Definíció. **χ^2-eloszlás:** Az X val. változó n szabadságfokú χ^2-eloszlású (jel.: $X\sim\chi^2_n$), ha $X = U_1^2+\ldots+U_n^2$, ahol $U_i\sim N(0,1)\ \forall i$-re és függetlenek egymástól.

Definíció. **t-eloszlás:** Az X valószínűségi változó n szabadságfokú Student-féle t-eloszlást követ (jel.: $X\sim t_n$), ha $X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}}$, ahol $Z\sim N(0,1)$ és $Y_n\sim\chi^2_n$ függetlenek egymástól.

Definíció. **F-eloszlás:** Az X valószínűségi változó m és n szabadságfokú F-eloszlást követ (jel.: $X\sim F_{m,n}$), ha $X = \frac{\frac{Y_m}{m}}{\frac{Z_n}{n}}$, ahol $Y_m\sim\chi^2_m$ és $Z_n\sim\chi^2_n$ függetlenek egymástól.
Mostantól α egy 0-hoz közeli pozitív szám lesz (például $0,05 = 5\%$), és vezessük be a következő jelöléseket az eloszlások kvantiliseire:

- u_α: $N(0,1)$ eloszlás $(1-\alpha)$-kvantilise, azaz $u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- $z_\alpha := u_{1-\alpha}$ (sok könyvben ezt használják)
- $t_{n,\alpha}$: n szabadságfokú t-eloszlás $(1-\alpha)$-kvantilise
- $\chi^2_{n,\alpha}$: n szabadságfokú χ^2-eloszlás α-kvantilise
- $F^\alpha_{m,n}$: m,n szabadságfokú F-eloszlás α-kvantilise

Definíció. **Konfidencia intervallum:** Adott α-hoz legalább $(1-\alpha)$ valószínűséggel tartalmazza az adott paramétert (vagy annak egy függvényét): $P_\vartheta\left(T_1(\mathbf{X}) < \hat\vartheta < T_2(\mathbf{X})\right) \geq 1-\alpha$.
Gyakran keresünk szimmetrikus konfidencia intervallumot, ilyenkor $T_1 = T_2 =: \Delta$, és az intervallum $\hat\vartheta\pm\Delta$ alakba írható.

Állítás. Legyen $X_1,\ldots,X_n\sim N(m,\sigma^2)$ i.i.d. minta. Ekkor

- m-re konfidencia intervallum
  - ha σ ismert, akkor $\overline{x}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - ha σ ismeretlen, akkor $\overline{x}\pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}$
- σ^2-re konfidencia intervallum: $\left[\frac{(n-1)\cdot(s_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{(n-1)\cdot(s_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right]$

Intervallumbecslés az ismeretlen ϑ paraméterre a paraméter ML-becslésének aszimptotikája alapján n elemű mintából: $\hat\vartheta\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{I_n(\hat\vartheta)}}$

Hipotézisvizsgálat

Hipotézis $\sim$ valami állítás, aminek igazságát vizsgálni szeretnénk

Paramétertér: $\Theta = \Theta_0\cup^*\Theta_1 \longrightarrow$ "valóság"
Mintatér: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_e\cup^*\mathcal{X}_k \longrightarrow$ "látszat" - MINTÁBÓL
$\mathcal{X}_k$: kritikus tartomány - azon $\mathbf{X}$ megfigyelések halmaza, amikre *elutasítjuk* a nullhipotézist
$\mathcal{X}_e$: elfogadási tartomány - azon $\mathbf{X}$ megfigyelések halmaza, amikre *elfogadjuk* a nullhipotézist

Hipotézisvizsgálati feladat:
$H_0:\ \vartheta\in\Theta_0$ $\rightsquigarrow$ nullhipotézis
$H_1:\ \vartheta\in\Theta_1$ $\rightsquigarrow$ ellenhipotézis vagy alternatív hipotézis

Tehát ha $\mathbf{X}\in\mathcal{X}_e$, akkor elfogadjuk H_0-t; ha $\mathbf{X}\in\mathcal{X}_k$, akkor pedig elutasítjuk H_0-t.

Amennyiben a Θ_0 halmaz egyelemű, akkor azt mondjuk, hogy H_0 egyszerű. H_1-re ugyanígy.

Az $\mathcal{X}$ mintatér felosztását általában egy statisztika (neve: próbastatisztika) segítségével végezzük el:

legyen T: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathrm{T}(\mathbf{x}) > c\}$ $\quad$ c neve: kritikus érték
$\mathcal{X}_e = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathrm{T}(\mathbf{x}) \leq c\}$

Döntés	H_0-t	
"Valóság"	elfogadjuk ($\mathcal{X}_e$)	elutasítjuk ($\mathcal{X}_k$)
H_0 teljesül (Θ_0)	helyes döntés	elsőfajú hiba
H_0 nem teljesül (Θ_1)	másodfajú hiba	helyes döntés

P(elsőfajú hiba)=$\alpha(\vartheta)$=$\mathrm{P}_\vartheta(\mathcal{X}_k)$, ahol $\vartheta \in \Theta_0$
P(másodfajú hiba)=$\beta(\vartheta)$=$\mathrm{P}_\vartheta(\mathcal{X}_e)$, ahol $\vartheta \in \Theta_1$
Erőfüggvény: ψ: $\Theta_1 \to \mathbb{R}$, $\psi(\vartheta) = P_\vartheta(\mathcal{X}_k)$
Terjedelem: $\alpha = \sup\{\alpha(\vartheta)$: $\vartheta \in \Theta_0\}$

p-érték: az az α terjedelem, ami esetén a próbastatisztika értéke egyenlő a kritikus értékkel : $\mathrm{T}(\mathbf{x}) = c_\alpha$.
A p-érték a legkisebb terjedelem, amire még elutasítjuk a H_0-t. Ha egy próbát számítógép segítségével végzünk el, rendszerint a p-érték révén tudunk dönteni: ha (p-érték)$< \alpha$, akkor elvetjük H_0-t.

Ha mind H_0, mind H_1 egyszerű, akkor adott α terjedelemhez lehet legerősebb próbát találni, ezt pedig úgy hívják, hogy *valószínűség-hányados próba*. A hipotéziseket folytonos esetre írom fel. Diszkrétre a sűrűségfüggvény helyett a konkrét eloszlást kell írni.
$H_0: \ f = f_0$
$H_1: \ f = f_1$

A valószínűség-hányados próba kritikus tartománya: $\mathcal{X}_k = \left\{\mathbf{x} : \frac{f_1(\underline{x})}{f_0(\underline{x})} > c_\alpha\right\}$

Tehát azokat az $\mathbf{x}$-eket, amire az $\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$ nagy, bepakoljuk a kritikus tartományba egészen addig, míg az adott α terjedelmet el nem érjük. Diszkrét esetben ehhez általában véletlenítésre van szükség, azaz bizonyos $\mathbf{x}$-ek esetén nem 1 vagy 0, hanem egy, e két szám közé eső (jelöljük p_α-val) valószínűséggel vetjük el a nullhipotézist.

A hipotézisvizsgálat menete próbastatisztika és kritikus érték segítségével:

1. A terjedelem (α) lefixálása, ami jellemzően 1% és 10% közötti, tipikusan 5%
   Megbízhatóság= $1 - \alpha$, általában %-osan írjuk
2. Nullhipotézis (H_0) felírása – sokévi, megszokott, elvárt értékeknek megfelelő paramétertartomány
3. Alternatív hipotézis (H_1) felírása – a minta alapján bennünket érdeklő kérdésnek megfelelő paramétertartomány
4. A probléma megoldására alkalmas próba vagy próbák kiválasztása – feltételek ellenőrzése
5. Próbastatisztika kiszámítása
6. Kritikus érték kiszámítása, kritikus tartomány ($\mathcal{X}_k$) megállapítása
7. Döntés:
   (a) $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \rightsquigarrow$ **erős döntés**, H_1-et elfogadjuk, H_0-t elvetjük/elutasítjuk
   (b) $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \rightsquigarrow$ **gyenge döntés**, H_1-et elutasítjuk, H_0-t nem tudjuk elutasítani
8. Szöveges értelmezés: α terjedelem/elsőfajú hiba valószínűsége mellett azt állíthatjuk/nem állíthatjuk, hogy ...

A hipotézisvizsgálat menete p-érték segítségével:

1. A terjedelem (α) lefixálása
2. Nullhipotézis (H_0) felírása
3. Alternatív hipotézis (H_1) felírása
4. A probléma megoldására alkalmas próba vagy próbák kiválasztása
5. p-érték megállapítása, rendszerint számítógép segítségével
6. Döntés:
   (a) p-érték $< \alpha \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \ \Leftrightarrow$ H_1-et elfogadjuk
   (b) p-érték $> \alpha \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \ \Leftrightarrow$ H_0-t nem tudjuk elutasítani
7. Szöveges értelmezés

Most néhány nevezetes próbát mutatunk be a normális eloszlás várható értékére, illetve szórására. Az α végig a próba terjedelmét jelöli, ami előre adott.

I. Próbák normális eloszlás várható értékére

1.) Egymintás próbák

a.) Egymintás u-próba

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(m, \sigma^2)$, ahol σ ismert, m paraméter

a.) $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m \neq m_0$ $\quad$ b.) $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m > m_0$ $\quad$ c.) $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m < m_0$

A próbastatisztika: $\mathrm{T}(\mathbf{X}) = u = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0,1)$
A kritikus tartományok:
a.) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : |u| > u_{\alpha/2}\}$
b.) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : u > u_\alpha\}$
c.) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : u < -u_\alpha\}$

b.) Egymintás t-próba

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(m, \sigma^2)$, ahol σ, m paraméter

a.) $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m \neq m_0$ $\quad$ b.) $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m > m_0$ $\quad$ c.) $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m < m_0$

A próbastatisztika: $\mathrm{T}(\mathbf{X}) = t = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \mathrm{t}_{n-1}$

A kritikus tartományok:
a.) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : |t| > t_{n-1,\alpha/2}\}$
b.) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : t > t_{n-1,\alpha}\}$
c.) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : t < -t_{n-1,\alpha}\}$

2.) Kétmintás próbák

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(m_1, \sigma_1^2)$
$Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathrm{N}(m_2, \sigma_2^2)$
Az elvégzendő próbák $H_0 : m_1 = m_2$ nullhipotézis esetén:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">a két minta
független</td><td>a két minta
nem független</td></tr>
<tr><td>σ_1 és σ_2 ismert</td><td colspan="2">a.) kétmintás u-próba</td><td>egymintás u-próba
a különbségekre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">σ_1 és σ_2 ismeretlen</td><td colspan="2">előzetes F-próba
$\sigma_1 = \sigma_2$ | $\sigma_1 \neq \sigma_2$</td><td rowspan="2">egymintás t-próba
a különbségekre</td></tr>
<tr><td>b.) kétmintás t-próba</td><td>c.) Welch-próba</td></tr>
</table>

a.) kétmintás u-próba
m_1, m_2 paraméterek, σ_1, σ_2 ismert
$H_0 : m_1 = m_2$ és H_1: ami a szövegkörnyezetben értelmes
A próbastatisztika: $u = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$

b.) kétmintás t-próba
$m_1, m_2, \sigma_1 = \sigma_2$ paraméterek
$H_0 : m_1 = m_2$ és H_1: ami a szövegkörnyezetben értelmes
A próbastatisztika: $t = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)(s_1^*)^2 + (m-1)(s_2^*)^2}{n+m-2}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \mathrm{t}_{n+m-2}$

c.) Welch-próba
$m_1, m_2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ paraméterek
$H_0 : m_1 = m_2$ és H_1: ami a szövegkörnyezetben értelmes
A próbastatisztika: $t' = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(s_1^*)^2}{n} + \frac{(s_2^*)^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \mathrm{t}_f$, ahol
$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n-1} + \frac{(1-c)^2}{m-1}$
$c = \frac{\frac{(s_1^*)^2}{n}}{\frac{(s_1^*)^2}{n} + \frac{(s_2^*)^2}{m}}$, ha $s_1^* > s_2^*$

II. Próbák normális eloszlás szórására

1.) **Egymintás próba:** χ^2-próba
$X_1, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m és σ ismeretlen paraméterek
$H_0 : \sigma = \sigma_0$ és $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$
A próbastatisztika: $h = \frac{(n-1)(S_n^*)^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{n-1}$
Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \left\{\mathbf{x} : h < \chi^2_{n-1,\alpha/2} \text{ vagy } h > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right\}$
Az ellenhipotézis lehet egyoldali is, ilyenkor a kritikus tartomány értelemszerűen módosul.

2.) **Kétmintás próba:** F-próba
$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(m_1, \sigma_1^2)$ $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathrm{N}(m_2, \sigma_2^2)$ $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ paraméterek
$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ és H_1: ami a szövegkörnyezetben értelmes
A próbastatisztika: $F = \frac{(S_1^*)^2}{(S_2^*)^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} F_{n-1,m-1}$

χ^2-próbák

a.) Diszkrét illeszkedésvizsgálat
Feladat: adott egy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n elemű minta, és azt akarjuk eldönteni, hogy a minta egy általunk "remélt" eloszlásból származik-e. *Diszkrét* illeszkedésvizsgálatnál feltesszük, hogy a mintaelemek r különböző értéket vehetnek fel: $\mathrm{P}(X_i = x_j) = p_j \quad j = 1, \ldots, r$. Jelöljük N_j-vel a gyakoriságokat, azaz azt, hogy az n elemű mintában hány darab x_j szerepel.

Osztályok	1	2	...	r	Összesen
Valószínűségek	p_1	p_2	...	p_r	1
Gyakoriságok	N_1	N_2	...	N_r	n

H_0 : a valószínűségek: $\mathbf{p}$=$(p_1, \ldots, p_r)$
H_1: nem ezek a valószínűségek
A próbastatisztika: $T_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\longrightarrow} \chi^2_{r-1}$ eloszlásban, ha $n \to \infty$
A kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-1,1-\alpha}\}$
Becsléses illeszkedésvizsgálat: csak annyit "sejtünk", hogy a minta valamilyen eloszlású, viszont a paramétereiről nincs sejtésünk. Ilyenkor amennyiben ML-módszerrel becsüljük meg az s darab ismeretlen paramétert, akkor a próbastatisztika: $T_n \overset{H_0 \text{ esetén}}{\longrightarrow} \chi^2_{r-1-s}$ eloszlásban, ha $n \to \infty$.
Nagyon fontos: a próba csak akkor hajtható végre, amennyiben az egyes osztályokban elegendő számú gyakoriság szerepel. Nem egyértelmű, milyen határvonalat húzzunk meg. Hüvelykujjszabályként azt lehet mondani, hogy legalább 4-6 gyakoriság szerepeljen a cellákban és np_i legalább 4 legyen minden osztályra. Amennyiben kevés gyakoriság van a cellákban, akkor az érintett osztályokat össze kell vonni.

b.) Diszkrét homogenitásvizsgálat
Feladat: van két **független** minta, mindkettő egy közös szempont szerint r osztály egyikébe sorolva. Azt kell eldönteni, hogy a két minta azonos eloszlásúnak tekinthető-e.

Osztályok	1	2	...	r	Összesen
1. minta					
Valószínűségek	p_1	p_2	...	p_r	1
Gyakoriságok	N_1	N_2	...	N_r	n
2. minta					
Valószínűségek	q_1	q_2	...	q_r	1
Gyakoriságok	M_1	M_2	...	M_r	m

H_0 : a valószínűségek: $(p_1, \dots, p_r) = (q_1, \dots, q_r)$
H_1: nem ezek a valószínűségek

A próbastat.: $T_{n,m} = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{N_i}{n} - \frac{M_i}{m}\right)^2}{N_i + M_i} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\longrightarrow} \chi^2_{r-1}$ eloszlásban, ha $n \to \infty$
A kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_{n,m}(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-1,1-\alpha}\}$

c.) Függetlenségvizsgálat
Feladat: van egy minta, két szempont szerint csoportosítva. Azt kell eldönteni, hogy a két szempont független-e egymástól.
$p_{i,j}$=P(egy megfigyelés az (i,j) osztályba kerül)
$N_{i,j}$=ennyi megfigyelés kerül az (i,j) osztályba

A mintavétel eredménye:

		2. szempont					
		1	...	j	...	s	Összesen
1. szempont	1	N_{11}	...	N_{1j}	...	N_{1s}	$N_{1\bullet}$
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	i	N_{i1}	...	N_{ij}	...	N_{is}	$N_{i\bullet}$
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	r	N_{r1}	...	N_{rj}	...	N_{rs}	$N_{r\bullet}$
Összesen		$N_{\bullet 1}$	...	$N_{\bullet j}$	...	$N_{\bullet s}$	n

ahol $N_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} N_{ij}$ és $N_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}$

H_0 : a szempontok függetlenek, azaz $p_{i,j} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ $\forall i, j$-re
H_1: nem azok

A próbastatisztika: $T_n = n \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{N_{i,j}^2}{N_{i\bullet} N_{\bullet j}} - 1 \right) \overset{H_0 \text{ esetén}}{\longrightarrow} \chi^2_{(r-1)(s-1)}$ eloszlásban, ha $n \to \infty$
A kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{(r-1)(s-1),1-\alpha}\}$

Ha $r = s = 2$, akkor a próbastatisztika $T_n = n \cdot \frac{(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21})^2}{N_{1\bullet}N_{2\bullet}N_{\bullet 1}N_{\bullet 2}}$-re egyszerűsödik, az aszimptotikus eloszlás pedig 1 szabadságfokú χ^2.

Folytonos illeszkedésvizsgálat

Azt akarjuk ellenőrizni, hogy egy $X_1, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású minta egy adott (fix paraméterű) folytonos eloszlásból származik-e. Tehát formálisan
$H_0 : F_{X_1}(x) = F(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, ahol F egy adott eloszlás eloszlásfüggvénye
$H_1 : \exists x \in \mathbb{R} : F_{X_1}(x) \neq F(x)$

Kolmogorov-Szmirnov próba
Próbastatisztika: $\sqrt{n} D_n(\mathbf{x}) = \sqrt{n} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$
A próbastatisztika eloszlása H_0 esetén az ún. Kolmogorov-eloszláshoz tart $(n \to \infty)$, melynek eloszlásfüggvénye $1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2x^2}$. Jelöljük K_α-val a Kolmogorov-eloszlás α-kvantilisét.
A kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : \sqrt{n} D_n(\mathbf{X}) > K_{1-\alpha}\}$

Megj.: D_n kiszámításához elég csak a mintapontokban, azaz F_n ugrópontjaiban tekinteni az eltérést: $D_n(\mathbf{x}) = \max_{1 \le i \le n} \max\left\{ \left| \frac{i-1}{n} - F(x_i^*) \right|, \left| \frac{i}{n} - F(x_i^*) \right| \right\}$, ahol x_i^* az i-edik rendezett mintaelem $(i = 1, \dots, n)$.
Megj.: azt is megtehetjük, hogy a mintából osztályközös gyakorisági sort hozunk létre – azaz mesterséges osztályozást készítünk –, majd χ^2-próbát hajtunk végre. Ezt az eljárást *diszkretizálás*nak hívjuk.

A Kolmogorov-Szmirnov próba messze nem a legjobb próba folytonos illeszkedésvizsgálatra, sokkal inkább a legegyszerűbb és legrégebbi. További próbák folytonos illeszkedésvizsgálatra:

- **Anderson-Darling próba**: nagyon hasonló a Kolmogorov-Szmirnov próbához, de jóval nagyobb nála az ereje. Fő erőssége: megfelelő paraméterezéssel beállítható, az eloszlás alsó vagy felső részére koncentráljunk-e.
- **Shapiro-Wilk próba**: a legerősebb próba annak ellenőrzésére, hogy a minta normális eloszlásból származik-e. A standard normális eloszlás rendezett mintáján alapul.

Nemparaméteres próbák az u-próbák/t-próbák helyett

Ezek a próbák az egymintás és kétmintás u-próbák/t-próbák helyett hajtandók végre, amennyiben nem teljesül, hogy a minta normális eloszlású (például vannak benne kiugró értékek). Az egymintás próba erre a célra az előjel próba és a Wilcoxon-próba, a kétmintás esetben pedig független minták esetén a Mann-Whitney próba. Kétmintás esetben amennyiben összefüggők a minták, akkor a különbségekre Wilcoxon-próbát vagy előjel próbát hajtunk végre.
Ezeket a próbákat mi csak folytonos eloszlásból származó mintákra fogjuk használni, ami a lejjebb szereplő formulákban is tükröződni fog, de kisebb módosításokkal a

próbák diszkrét eloszlásokra is alkalmazhatók.

1.) Egymintás próbák

Adott egy $X_1, \dots, X_n$ folytonos eloszlásból származó minta. A nullhipotézis azt állítja, hogy a medián egy előre megadott m_0 számmal egyenlő-e. Az ellenhipotézis egy- és kétoldali is lehet.
A nullhipotézis: $H_0 : m = m_0$, ahol m a mediánt jelöli. Másképp: $H_0 : P(X - m_0 > 0) = 1/2$.

a.) Előjel próba

A próbastatisztika: $T = \sum_{i=1}^{n} I(X_i > m_0) \rightsquigarrow$ megszámoljuk, hány mintaelem nagyobb m_0-nál A próbastatisztika H_0 teljesülése esetén $Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$ eloszlású, ezáltal a p-érték

- kétoldali ellenhipotézis esetén: $\frac{2}{2^n} \sum_{i=0}^{min(T, n-T)} \binom{n}{i}$
- baloldali ellenhipotézis esetén: $\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{T} \binom{n}{i}$
- jobboldali ellenhipotézis esetén: $\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-T} \binom{n}{i}$

b.) Wilcoxon-próba

A próba végrehajtásához legyen $Y_i := |X_i - m_0|, \quad i = 1, \dots, n$. Jelölje R_i az i-edik mintaelem rangját: $R_i = \sum_{j=1}^{n} I(Y_i \geq Y_j)$.
A próbastatisztika azon rangok összege, amikre $X_i - m_0$ pozitív: $T^+ = \sum_{i:\ X_i > m_0} R_i$
A kritikus érték(ek) meghatározása viszonylag macerás. Kis mintákra speciális táblázatokból kell kinézni az értékeket, nagy mintákra pedig a nullhipotézis esetén a lenormált próbastatisztika közel standard normális eloszlású, így ennek a kvantiliseit lehet használni.

2.) Kétmintás próbák

Adott egy $X_1, \dots, X_n$ minta és egy tőle független $Y_1, \dots, Y_m$ minta, mindkettő folytonos eloszlásból. A nullhipotézis azt állítja, hogy a két eloszlás mediánja megegyezik-e. Az ellenhipotézis egy- és kétoldali is lehet.
A nullhipotézis formálisan: $H_0 : P(X > Y) = P(X < Y)$.

a.) Mann-Whitney próba

A próbastatisztika: $W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} I(X_i > Y_j)$.
A kritikus érték(ek) meghatározása hasonlóan megy, mint a Wilcoxon-próbánál. Kis mintákra speciális táblázatokból kell kinézni az értékeket, nagy mintákra pedig a próbastatisztikát le kell normálni és használhatjuk a standard normális eloszlás kvantiliseit.

Regressziószámítás

Lineáris regresszió

Feladat: adottak $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pontok, ezekre szeretnénk egyenest illeszteni (neve: *regressziós egyenes*) legkisebb négyzetek módszerével, azaz keressük azon a és b konstansokat, melyekre $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$ minimális.

A modell: $y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$, ahol $\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$ és $\mathrm{D}^2\varepsilon_i = \sigma^2 < \infty \quad (i = 1, \dots, n)$

Paraméterbecslés: $\hat{a} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$, $\hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\overline{x}$

Reziduumok (becsült hibák): $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{a}x_i - \hat{b} \quad i = 1, \dots, n$

Reziduális négyzetösszeg: RNÖ$= \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum (y_i - \overline{y})^2 - \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$

A hibák szórásnégyzetének becslése: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{RNÖ}}{n-2}$

A becsült paraméterek szórásnégyzete: $D^2(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$, $D^2(\hat{b}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2}\right)$

Tapasztalati korrelációs együttható: $R = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum (y_i - \overline{y})^2}}$. Ennek négyzetét, R^2-et, *determinációs együtthatónak* hívjuk, és ezzel mérjük a modell jóságát. Az R^2 mutatja meg, hogy százalékban a modell az Y változékonyságából mennyit magyaráz meg. Értéke 0 és 1 között lehet, ha 0-hoz közeli, akkor a modell gyengén teljesít, ha 1-hez, akkor jól.

A lineáris regresszió egy modellezési eszköz. A statisztikai modellek is olyanok, mint a hétköznapi értelemben használt modellek: csak leképezni próbálják a valóságot, de visszaadni nem tudják. Ebből kifolyólag körültekintéssel kell megalkotni minden modellt.

A lineáris regresszió feltevései:

- Linearitás: a magyarázó változó és a kimeneti változó magyarázó változó értékeire feltételes átlagai között lineáris az összefüggés
- Homoszkedaszticitás: a reziduálisok (hibatag) σ szórása megegyezik a magyarázó változó minden értékére (azaz nem függ az i indextől)
- Függetlenség: adataink egyszerű véletlen mintából származnak, tehát függetlenek egymástól
- Normalitás: a magyarázóváltozó minden rögzített értékére, a kimeneti változó normális eloszlású. Ez gyakorlatilag megegyezik a reziduálisok normalitásával.

Hipotézisvizsgálat a lineáris modellben:
$H_0 : a = 0$
$H_1 : a \neq 0$
Próbastatisztika: $t = \frac{\hat{a}}{D(\hat{a})}$
H_0 esetén $t \sim t_{n-1}$, azaz t-próbát kell végezni a t próbastatisztika segítségével.

Amennyiben el tudjuk vetni, hogy a regressziós egyenes meredeksége 0, akkor azt mondjuk, hogy szignifikáns az összefüggés a két változó között.

Dummy (bináris) változó: két értéket vesz fel (például férfi és nő). Ilyenkor az egyik értékhez célszerű 0-t, a másikhoz 1-et rendelni. A regressziós elemzés eredményei továbbra is érvényben maradnak, amennyiben a magyarázóváltozó dummy változó.

Többváltozós regresszióelemzés

Egy n elemű mintából a következő adatok állnak rendelkezésre: $(y_i, x_{i1}, \ldots, x_{ip})$, $i = 1, \ldots, n$, azaz van egy kimeneti és p magyarázóváltozónk. Ebben az esetben is alkalmazható lineáris regresszió, a modell a következőféleképpen írható fel:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i = \mathbf{x}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{általában } n >> p$$

ε továbbra is a fentebbi módon definiált hibatag, β_0 a tengelymetszet, amit az eddigiekben b-vel jelöltünk. A modell ebben az esetben nem egy egyenest, hanem egy hipersíkot generál.
y elnevezései: eredményváltozó, függő változó, endogén változó
x_i-k elnevezései: magyarázóváltozók, független változók, exogén változók
Az együtthatók kiszámolásához írjuk fel a modellt mátrix alakban: $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, ahol

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{x}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\mathsf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

A legkisebb négyzetek becslését ebben az esetben a következőféleképpen kapjuk:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$$

Ehhez persze fel kell tennünk az inverz létezését. Azt az esetet, mikor nem létezik az inverz itt nem tárgyaljuk. $X^T X$ inverze létezik abban az esetben, ha a magyarázóváltozók lineárisan függetlenek, azaz egyik magyarázóváltozót sem tudjuk kifejezni a többi lineáris kombinációjaként. Amennyiben fennáll valamilyen szintű (lineáris) összefüggés a magyarázó változók között, abban az esetben *multikollinearitás*ról beszélünk. Ezt a gyakorlatban érdemes megvizsgálni, mert hatással lehet a modell validitására (azaz, hogy mennyire írja le jól a valóságot, valóban azt adja-e vissza, amit várunk).
Reziduálisok: $\widehat{\varepsilon} = \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}$
Reziduális négyzetösszeg: $\mathrm{RNÖ} := \|\widehat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2$
Teljes négyzetösszeg: $\mathrm{NÖ} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$

Determinációs együttható: $R^2 = 1 - \frac{\mathrm{RNÖ}}{\mathrm{NÖ}} = \frac{\mathrm{NÖ} - \mathrm{RNÖ}}{\mathrm{NÖ}}$ $\rightsquigarrow$ az eredményváltozó változékonyságának hány %-át magyarázza a regressziós modell. Értéke 0 és 1 között lehet. Minél nagyobb, annál jobb.
Gyakori modellválasztási kritériumok:

- Korrigált determinációs együttható: $R^2_{\mathrm{adj}} = 1 - \frac{n-1}{n-r-1}\frac{\mathrm{RNÖ}}{\mathrm{NÖ}}$ $\rightsquigarrow$ minél nagyobb, annál jobb
- **Akaike-féle információs kritérium**: $AIC = 2k - 2\log \widehat{L}$, ahol
  - k: a becsülendő paraméterek száma, a regressziós modellben $k = p + 1$
  - $\widehat{L}$ a likelihood-függvény értéke akkor, ha az ML-becslést használjuk (normális eloszlású hibáknál ez megegyezik a legkisebb négyzetes becsléssel)

  Minél kisebb, annál jobb.
- **Bayes-féle információs kritérium**: $BIC = \log n \cdot k - 2\log \widehat{L}$ $\rightsquigarrow$ minél kisebb, annál jobb

A regresszióelemzés lépései:

- az eredményváltozó(k) és a lehetséges magyarázóváltozók kiválasztása
- adatgyűjtés
- adattisztítás, adathibák korrekciója
- pontdiagrammal a potenciális modellek kiválasztása (lineáris, négyzetes, logisztikus stb.)
- paraméterbecslés
- modelldiagnosztika – az együtthatók szignifikanciája, a modell együttes jósága
- legjobb modell kiválasztása, "modellépítés" – több módszer/mutató közül választhatunk: korrigált R^2, cross-validation, AIC/BIC információs kritériumok stb.
- előrejelzés