Valószínűségszámítás 2 gyakorlat
Alkalmazott matematikus szakirány

Játékszabályok

- Az órákon részt kell venni, maximum 3-szor lehet hiányozni. Aki többször hiányzik, nem kap gyakjegyet.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  · 40 pont: 1. ZH a félév közepén
  · 40 pont: 2. ZH a félév végén
  · 20 pont: beadandó feladatokkal (2 pont · 10)
  · x pont: szorgalmi feladatokkal
- Mindkét ZH-n minimálisan teljesíteni kell a 30 %-ot, azaz a 12 pontot.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t írsz, és maximum kettest kaphatsz.
- A ZH-kon a kiosztott táblázatokon kívül használni lehet egy A4-es lapra (akár mindkét oldalára) KÉZZEL írott "puskát".
- Beadandók: Mindegyik maximálisan 2 pontot ér, a legjobb 10-et veszem figyelembe. A beadandóknál több feladatot is kihirdetek, amik közül ízlés szerint válogathattok. A beadandók célja, hogy folyamatosan tanuljatok, gyakoroljatok, ezért fix határidőig lehet őket benyújtani.
- Osztályozás:

1	0	-	34,99
2	35	-	49,99
3	50	-	64,99
4	65	-	79,99
5	80	-	1000

Személyes adatok

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@cs.elte.hu`
Honlap	`www.cs.elte.hu/~vargal4`

Ajánlott irodalom

- Bognárné–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Arató–Prokaj–Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet (később: tankonyvtar.hu, most `http://www.cs.elte.hu/~zempleni/oktatas.html`)

1.) De Méré problémája, 1654. De Méré lovag nagy szerencsejátékos volt, az alábbi két kérdéssel fordult Pascal-hoz:

- Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz?
- Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz?

A lovag tisztában volt vele, hogy az első kérdésre adandó válasz $\frac{1}{2}$-nél kicsivel kisebb, a másodikra pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsivel nagyobb, de fogalma se volt, miért.
a.) Számítsuk ki a két valószínűség pontos értékét!
b.) A két valószínűség miért van közel egymáshoz?

2.) Markowitz-modell, 1952. Számlavezető bankodnál rendelkezésedre áll 170.000 Ft, amit be szeretnél fektetni a bank által kínált három portfólióba: az A portfólió éves várható hozama (a korábbi évek tapasztalatai alapján) 3%, 2% szórással; a B portfólióé 4%, 3% szórással; a C portfólióé pedig 5%, 4% szórással. A portfóliók hozama független egymástól. Határozd meg az optimális befektetési stratégiádat, ha célod egy várhatóan 4%-os hozamot produkáló, ÉS minél kisebb szórású befektetési struktúra kialakítása! Várhatóan mennyi pénzed lesz egy év múlva az optimális befektetési stratégiával? [Befektetési stratégia: pénzed hány %-át fekteted az A, B és C portfóliókba.]

3.) Mi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával 12-szer dobva, minden szám legalább egyszer kijött?

4.) Péternek 20, Marcsinak 30 Ft-ja van. Egy játékban Péter $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer 1 Ft-ot Marcsitól és ugyanennyi valószínűséggel veszít 1 Ft-ot. Addig játszanak, míg valamelyikük elnyeri a másik összes pénzét. Milyen valószínűséggel nyer Péter?

5.) Legyen X abszolút folytonos eloszlású, $Y = aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Határozd meg Y eloszlás-, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét! $R(X, Y) =$?

6.) Legyen $X \sim E(0, 3)$ és $Y = |X - 1|$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

7.) Legyen X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2-2x-1}$, Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye pedig $f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4y^2+4y-1}$. Van-e olyan alkalmas g függvény, hogy $Y = g(X)$ teljesüljön? Ha van, határozd meg ez(eke)t a függvény(eke)t!

8.) Mutass példát olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre és ezekben olyan A, B, C eseményekre, amelyekre

a.) A, B és C páronként függetlenek, azonban nem teljesen függetlenek;

b.) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ teljesül, azonban az A, B, C események nem teljesen függetlenek!

9.) Gergő egyetemista, aki gyalog 30 percre lakik az egyetemtől, és egész évben nem vásárol jegyet/bérletet tömegközlekedésre. Ha metróval megy be órára, akkor az ellenőrök 50% eséllyel, amennyiben pedig villamossal, akkor 5%-os eséllyel csípik nyakon minden úton. A pótdíj összege 16 ezer Ft. Egész évben 200 alkalommal kell bemennie az egyetemre. Minden egyes alkalommal 0,1 valószínűséggel választja a villamost, p valószínűséggel pedig a metrót.

a.) Határozd meg a p értékét, ha egész évben átlagosan 32 ezer Ft-ot "szán" a bírságokra!

b.) Az éves diákbérlet 40 ezer Ft-ba kerül. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy Gergő az éves bérlettel jobban jár!

c.) Gergőt október 4-én az egyetemre menet megbírságolták az ellenőrök. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy villamossal közlekedett!

10.) Legyen X nemnegatív diszkrét valószínűségi változó.

a.) Bizonyítsuk be, hogy $EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$!

b.) Ennek segítségével vezessük le a geometriai eloszlás várható értékét!

11.) Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. valószínűségi változók. Jelölje $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Tegyük fel, hogy X_i-k pozitívak, $EX_1 < \infty$ és $E(1/S_n) < \infty$. Határozd meg az $E\left(\frac{S_k}{S_n}\right)$ mennyiséget, ha

a.) $k \leq n$

b.) $k > n$

B1.) [IX.22.] Számlavezető bankodnál rendelkezésedre áll 190.000 Ft, amit be szeretnél fektetni a bank által kínált két portfólióba: az A portfólió éves várható hozama (a korábbi évek tapasztalatai alapján) 3%, 2% szórással; a B portfólióé pedig 4%, 3% szórással. A portfóliók hozama közötti korreláció $-0,5$. Határozd meg az optimális befektetési stratégiádat, ha célod egy minél kisebb szórású befektetési struktúra kialakítása! Várhatóan mennyi pénzed lesz egy év múlva az optimális befektetési stratégiával? [Befektetési stratégia: pénzed hány %-át fekteted az A és B portfóliókba.]

SZ1.) Legyen $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvény, $F(0) = 0$. Mutasd meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1 \\ F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. (1 pont)

SZ2.) Legyenek $X \sim N(0, 1^2)$ és $Y \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$ független valószínűségi változók. $U := |\text{sgn}(X) - Y|$, ahol sgn(..) az előjelfüggvény. Határozd meg U várható értékét! (1 pont)

SZ3.) Legyen $X \sim E(-3, 4)$, $Y = g(X) = |X - 1| + |X + 1|$. Határozd meg Y eloszlásfüggvényét és várható értékét! Milyen típusú valószínűségi változó Y? (2 pont)

12.) Legyen X nemnegatív valószínűségi változó. Jelölje $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$-et, amit *túlélésfüggvény*nek nevezünk. Tegyük fel, hogy a valószínűségi változónak tetszőleges rendű momentuma létezik és véges.

a.) Bizonyítsd be, hogy $EX = \int_0^{\infty} d\overline{F}(x)$

b.) Bizonyítsd be, hogy $EX^k = \int_0^{\infty} kx^{k-1}\, d\overline{F}x$

c.) Ezek segítségével számítsd ki az exponenciális eloszlás k-adik ($k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) momentumát!

13.) Legyen X olyan valószínűségi változó, amelyről a következők ismertek: $D^2X = \frac{3}{16}$ és $EX^2 + EX^4 = 2EX^3$. Határozd meg X eloszlását!

14.) Legyen $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ cx + d & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{ha } 2 < x \end{cases}$

a.) Határozd meg az ismeretlen valós c és d paraméterek lehetséges értékeit, ha a fenti $F(x)$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye!

b.) Határozd meg X várható értékét!

c.) Milyen eloszlású X, ha X abszolút folytonos?

15.) Legyen $F(x) = \begin{cases} a_1 + a_2 e^{x} & \text{ha } x \leq 0 \\ b_1 + b_2 e^{-x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

a.) Határozd meg az ismeretlen valós a_1, a_2, b_1 és b_2 paraméterek lehetséges értékeit, ha a fenti $F(x)$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye!

b.) Határozd meg az ismeretlen paramétereket, ha X abszolút folytonos és $EX = 0$!

B2.) [IX.29] Legyen $X \sim E(0,1)$, $Y = \log\left(\frac{X}{1-X}\right)$. Határozd meg Y eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét. [Y eloszlásának neve: logisztikus eloszlás.]

B3.) [IX.29]

Legyen $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2(x-1)^3} & \text{ha } x \le 0 \\ a + bx & \text{ha } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{ha } 2 < x \end{cases}$

a.) Határozd meg az ismeretlen valós a és b paraméterek lehetséges értékeit, ha a fenti $F(x)$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye!

b.) Számítsd ki X várható értékét!

c.) Mely paraméterértékek esetén lesz X abszolút folytonos?

SZ4.) Legyen $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le -1 \\ ax^2 + bx + c & \text{ha } -1 < x \le 2 \\ 1 & \text{ha } x > 2 \end{cases}$

a.) Határozd meg az ismeretlen valós a, b és c paraméterek lehetséges értékeit, ha a fenti $F(x)$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és tudjuk róla, hogy 1 a várható értéke!

b.) Mely paraméterértékek esetén lesz X abszolút folytonos? (1+1=2 pont)

SZ5.) Legyen $F(x)$ eloszlásfüggvény és $a \in \mathbb{R}$ pozitív szám. Számítsuk ki a következő integrált:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [F(x+a) - F(x)]\, dx$! (1 pont)

SZ6.) Mutassuk meg, hogy az X valószínűségi változó várható értéke pontosan akkor létezik, amikor $[X]$-é, továbbá $X = [X]$ pontosan akkor, amikor X egész értékű! (2 pont)

16.) Legyen X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

a.) Határozd meg $Y = F(X)$ eloszlását!

b.) Ez alapján hogyan tudunk generálni egy X eloszlású val. változót?

17.) Legyenek $X, Y, Z \sim E(0,1)$ függetlenek. Határozd meg a következő transzformáltak sűrűségfüggvényét:

a.) $U = X + Y$;

b.) $U = X + Y + Z$;

c.) $U = X - Y$;

d.) $U = aX + bY$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

18.)

a.) Mutasd meg, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} |x| e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$! Milyen valószínűségszámítási értelmet tudunk adni az integrálnak?

b.) Legyenek $X, Y \sim N(0,1)$ eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Határozd meg $U = \frac{X}{Y}$ sűrűségfüggvényét és várható értékét! Milyen eloszlású U?

c.) Legyenek $X \sim N(0, \sigma_1^2)$ és $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$ egymástól független valószínűségi változók. Mutasd meg, hogy ekkor $\frac{X}{Y} \sim Cauchy\left(0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$!

19.) Legyenek $X_i \sim N(0,1)$, $1 \le i \le n$ függetlenek.

Ekkor $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ valószínűségi változó eloszlását n szabadságfokú khí-négyzet-eloszlásnak nevezzük, jelölése: $Y_n \sim \chi_n^2$.

a.) Mutassuk meg, hogy $X_1^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$!

b.) Mutassuk meg, hogy $\frac{X_1^2 + X_2^2}{2} \sim \mathrm{Exp}(1)$!

c.) Mutassuk meg karakterisztikus függvények nélkül, hogy $Y_n \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$!

20.) Szandi minden nap villamossal és busszal közlekedik, hogy eljusson az egyetemre. Az alábbi ábra tartalmazza a közlekedési időket:

Otthon	$\xrightarrow{\text{gyalog}}$ 5 p	Villamosmegálló	$\xrightarrow{\text{villamossal}}$ 10 p	$\xrightarrow{\text{gyalog}}$ 2 p	Buszmegálló	$\xrightarrow{\text{busszal}}$ 8 p	$\xrightarrow{\text{gyalog}}$ 5 p	**Egyetem**

Tapasztalatai alapján átlagosan 2 percet vár a villamos megállójában és 4 percet a busz megállójában. Szandi ma reggel később ébredt fel, ezért csak 7:43-kor indult el otthonról, az első órája 8:15-kor kezdődik. Becsüljük különböző, értelmes valószínűségi modellek segítségével annak a valószínűségét, hogy el fog késni!

21.) Box-Müller transzformáció. Legyenek $X_1, X_2 \sim E(0,1)$ függetlenek. Legyenek $Y_1 = \sqrt{-2\log X_1}\cos(2\pi X_2)$, $Y_2 = \sqrt{-2\log X_1}\sin(2\pi X_2)$. Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ függetlenek!

22.) Legyenek $X \sim \chi_p^2$, $Y \sim \chi_q^2$ függetlenek! Mutassuk meg, hogy $U = X + Y$ és $V = \frac{X}{X+Y}$ függetlenek, és határozzuk meg az eloszlásukat!

23.) Legyenek $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ függetlenek! Mutassuk meg, hogy $U = X + Y$ és $V = \frac{Y}{X+Y}$ függetlenek, és határozzuk meg az eloszlásukat!

24.) **Kockázati folyamat diszkrét időben.** Egy biztosító 2010. január 1-jén 10 M Ft tőkével rendelkezik. Ügyfelei egy év alatt 10 M Ft biztosítási díjat fizetnek. Az év során bekövetkezett káreseményekre a biztosító mindig a következő év elején teljesíti a kifizetést, minden káresetnél 2 M Ft-ot. Korábbi tapasztalatok alapján megfigyelték, hogy egy év alatt a káresemények száma 5 paraméterű Poisson-eloszlást követ. A biztosító csődbe megy, ha aktuális tőkéje kevesebb lesz 0-nál. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a biztosító

a.) 2011. január 1-jén megy csődbe (az előző években nem volt csődben);
b.) 2012. január 1-jén megy csődbe (az előző években nem volt csődben);
c.) 2013. január 1-jén megy csődbe (az előző években nem volt csődben).

25.) Mely c-re lesznek kétdimenziós sűrűségfüggvények az alábbiak? Adjuk meg a peremsűrűségfüggvényeket és a kovarianciamátrixot!

a.) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 2x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

b.) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x+y) & \text{ha } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

26.) Legyen X és Y független standard normális eloszlású. Határozzuk meg $\begin{pmatrix} 2X+3Y \\ -X+Y \end{pmatrix}$ együttes sűrűségfüggvényét és kovarianciamátrixát!

27.) Legyenek $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, $r := R(X,Y)$. Határozzuk meg az együttes sűrűségfüggvényüket! $P(X < m_1, Y < m_2) = ?$

28.) Legyen $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ sűrűségfüggvénye a következő:
$f_{\underline{X}}(x_1,x_2,x_3) = a \exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\frac{x_2-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2+1}{2}\right)^2 + \left((x_3-2)^2\right)\right\}$, ahol $a \in \mathbb{R}$.
Határozd meg

a.) az a számot;
b.) $\underline{X}$ kovarianciamátrixát;
c.) $(X_1, X_3)^T$ sűrűségfüggvényét;
d.) a $P(X_1 < 0,\ X_3 < 1)$ valószínűséget!

B4.) [X.6.] Juliska néni a városi piacon értékesíti almáját. Mind az értékesítési mennyiség, mint az ár véletlennek tekinthető (lehet vele alkudozni). Az egy nap alatt eladott mennyiség (kg) Pareto eloszlású $\frac{5}{4}$ és 10 paraméterekkel, míg az eladott almák ára (Ft/kg) egyenletes eloszlású 180 és 220 paraméterekkel. Tegyük fel, hogy a mennyiség és az ár függetlenek egymástól. Költségei naponta 4000 forintot tesznek ki (benzinköltség).

a.) Várhatóan mennyi profitra fog szert tenni egy nap alatt?
b.) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy Juliska néni napi profitja meghaladja az 5000 forintot!

B5.) [X.6.] Legyen $(X,Y)^T$ sűrűségfv.-e $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{ha } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
Határozzuk meg az $U = X^2 + Y^2$ és a $V = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvényét!

B6.) [X.13.] Legyen az $(X,Y)^T$ pont egyenletes eloszlású a $(-1,0), (0,0), (0,1)$ pontok által meghatározott háromszögben. Mi lesz az $(X,Y)^T$ kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

B7.) [X.13.] Legyen $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ sűrűségfüggvénye a következő:
$f_{\underline{X}}(x_1,x_2,x_3) = a \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{8} - x_3^2 + \frac{x_2}{2} - \frac{1}{2}\right\}$, ahol $a \in \mathbb{R}$.
Határozd meg

a.) az a számot;
b.) $\underline{X}$ kovarianciamátrixát;
c.) a $P(X_1 < 0, X_1 > 2, X_3 < 1)$ valószínűséget!

SZ7.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(1)$ függetlenek.
Legyen $Y_i = \frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén és $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Számítsuk ki $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ együttes sűrűségfüggvényét. Függetlenek a koordináták? (2 pont)

SZ8.) Legyenek $\underline{X} \sim N_3(\underline{0}, I_3)$, továbbá $Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}}$ $\quad i = 1, 2, 3$.
Határozzuk meg $\underline{Y}$ sűrűségfüggvényét! (2 pont)

SZ9.) Mely c-re lesz kétdimenziós sűrűségfüggvény az alábbi? Adjuk meg a peremsűrűségfüggvényeket és a kovarianciamátrixot!
$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot \max\{x,y\} & \text{ha } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ (1 pont)

SZ10.) Legyenek X és Y normális eloszlásúak, $R(X,Y) = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor X és Y függetlenek! (1 pont)

SZ11.) Rékának és Bálintnak együtt 1000 darab giccsbábut kell elkészítenie. A bábuk gyártása két részből áll: először egy gép segítségével elkészítik a porcelán bábut, majd befestik. A festés ideje elég változékony, ezért ezt valószínűségi változónak tekintjük. Ha Réka/Bálint egyedül végezné el a munkát, akkor a következő időt venne igénybe számukra a munka (minden szám órában értendő):

	Gépi megmunkálás	Festés
Réka egyedül	2	$X \sim E(4,6)$
Bálint egyedül	3	$Y \sim E(3,5)$

Az üzemben van elegendő bábukészítő gép és festék, hogy együtt dolgozva, egymást ne tartsák fel. Először az összes bábut legyártják géppel, ezután állnak neki a festésnek.

a.) Várhatóan mennyi idő alatt végeznek, ha mindketten dolgoznak?

b.) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy mindketten dolgozva, 3 óra alatt befejezik a munkát! (0,5+1,5=2 pont)

29.) Legyenek X és Y valószínűségi változók, $\varepsilon > 0$ valós szám. Lássuk be, hogy ekkor $P(X+Y>\varepsilon) \le P(X>\varepsilon/2) + P(Y>\varepsilon/2)$.

30.) Legyenek X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és X valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$, akkor $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, azaz a sztochasztikus konvergenciából következik az eloszlásbeli konvergencia.

31.) Legyenek X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és X valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{1 vsz.}} X$, akkor $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$, azaz az 1 valószínűségű konvergenciából következik az sztochasztikus konvergencia.

32.) Legyenek X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és X valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$, akkor $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$, azaz az L^p-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

33.) Legyenek X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és X valószínűségi változók, $a, b \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, akkor $aX_n + b \xrightarrow[n\to\infty]{d} aX + b$.

34.) Legyenek X_n és Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók. Igaz-e, hogy amennyiben

a.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} X + Y$;

b.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X + Y$;

c.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X + Y$;

d.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X + Y$;

e.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} Y$, akkor $X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.m.}} XY$;

f.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} Y$, akkor $X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} XY$;

g.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$, akkor $X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} XY$;

h.) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Y$, akkor $X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} XY$;

35.) Legyenek X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} a$, akkor $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} a$.

36.) Igaz-e, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, akkor $X_n - X \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$.

37.) Cramér-Szluckij lemma.
Legyenek X_n, Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és X valószínűségi változók, $a \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ és $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} a$, akkor

a.) $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X + a$;

b.) $X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} aX$.

38.) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, $\Omega = [-2, 2]$. Vizsgáljuk az alábbi valószínűségi változó sorozat konvergenciáját:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in \left[1 + \frac{1}{n}, 2\right] \\ -1 & \text{ha } \omega \in \left[-2, -1 - \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

39.) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, $\Omega = [0, 1]$. Vizsgáljuk az alábbi valószínűségi változó sorozat konvergenciáját:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} e^n & \text{ha } \omega \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

40.) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, $\Omega = [0, 1]$. Vizsgáljuk az alábbi valószínűségi változó sorozat konvergenciáját:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és } X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Mutassuk meg, hogy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, de $X_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{p} X$

41.) Vizsgáljuk annak a valószínűségi változó sorozatnak a konvergenciáját, amelynél a valószínűségi változók függetlenek és eloszlásuk az alábbi: $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

B8.) [X.20.] Legyenek $X_n \sim\text{Ind}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $X \sim\text{Ind}\left(\frac{1}{2}\right)$ függetlenek. Vizsgáljuk meg, hogy X_n tart-e X-hez 1 valószínűséggel, sztochasztikusan, eloszlásban, L^p-ben!

B9.) [X.20.] Mutassuk meg, hogy amennyiben $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX$ és $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n^2 = EX^2$.

SZ12.) Legyenek X_n $(n = 1, 2, \dots)$ és X valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X \iff E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n-X|}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (2 pont)

SZ13.) Az előző szorgalmi eredményét felhasználva lássuk be a Riesz-lemmát: ha $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$, akkor létezik olyan n_k részsorozat, amire $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{1 \text{ vsz.}} X$, azaz sztochasztikusan konvergens valószínűségi változók sorozatának van 1 valószínűséggel konvergens részsorozata. (1 pont)

SZ14.) Minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik k és m úgy, hogy $n = 2^k + m$, ahol $k = 0, 1, \dots$ és $m = 0, 1, \dots, 2^k - 1$.

Legyen $X_n(\omega) = \begin{cases} 2^k & \omega \in \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

Milyen értelemben konvergál X_n? (1 pont)

42.) X_i-k $(i = 1, 2, ...)$ független val. változók Hova konvergál és hogyan?

a.)	$X_i \sim \text{Ind}(p)$	$\frac{X_1^5+...+X_n^5}{n}$
b.)	$X_i \sim \text{Bin}(2, 1/2)$	$\frac{X_1+...+X_n}{X_1^4+...+X_n^4}$
c.)	X_i: az i-edik kockadobás eredménye	$\frac{X_1^2+...+X_n^2}{n}$
d.)	$X_i \sim E(2, 6)$ $(i = 1, 2, ...)$	$\sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n}$
e.)	$X_i \sim \text{Exp}(2)$ $(i = 1, 2, ...)$	$\frac{e^{X_1}+...+e^{X_n}}{n}$
f.)	$X_i \sim N(2, 3^2)$ $(i = 1, 2, ...)$	$\frac{X_1+...+X_n}{n^3}$

43.) Független, p valószínűséggel sikeres kísérleteket végzünk. Legyen $Y_i = 1$, ha az i-edik és az $i+1$-edik kísérlet sikeres. Teljesül-e az $Y_1, Y_2, \dots$ sorozatra a nagy számok gyenge törvénye?

44.) Egy részvény éves hozama $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel −50%. Az éves hozamok függetlenek egymástól. Mihez tart a tőkénk, ha
a.) teljes tőkénket, azaz C Ft-ot fektetünk be és nem vesszük ki a pénzünket?
b.) minden évben az aktuális össztőkénk felét fektetjük be, másik felét pedig otthon őrizzük?

45.) Határozzuk meg a karakterisztikus függvényt, ha X eloszlása
a.) $P(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$;
b.) $P(X = k) = P(X = -k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$;
c.) $\text{Ind}(p)$;
d.) $\text{Geo}(p)$;
e.) $\text{NegBin}(n, p)$;
f.) $\text{Exp}(\lambda)$;
g.) $\Gamma(\alpha, \lambda)$;
h.) $E(a, b)$;
i.) $E(-1, 1)$;
j.) $\text{Cauchy}(0, 1)$;
k.) $N(0, 1)$.
l.) $\begin{cases} 1 - |t| & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.

46.) Kakterisztikus függvények-e az alábbiak?
a.) $\sin(t)$;
b.) $\overline{\varphi}$;
c.) φ^2;
d.) $|\varphi|^2$;
e.) $\cos(t)$;
f.) $\cos^2(t)$;
g.) $\cos(t^2)$;
h.) e^{it-t^2};
i.) e^{-t^4};
j.) e^{-t};
k.) $e^{-|t|}$;

47.) Fejezzük ki a valószínűségi változó n-edik momentumát és szórásnégyzetét a karakterisztikus függvény segítségével!

48.) Keressünk olyan karakterisztikus függvény sorozatot, aminek a limesze nem karakterisztikus függvény!

49.) Keressünk példát olyan X és Y valószínűségi változókra, amelyekre $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, azonban X és Y nem függetlenek!

50.) Legyenek $X \sim E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ és $P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$ függetlenek. Karakterisztikus függvények segítségével állapítsuk meg $X + Y$ eloszlását!

51.) Milyen eloszlású n darab független Cauchy-eloszlású valószínűségi változó átlaga?

52.) Mutassuk meg, hogy két független, azonos eloszlású valószínűségi változó különbsége nem lehet $E(-1, 1)$ eloszlású!

B10.) [XI.10.] Van egy szabálytalan kockánk, amin egy 1-es, két 2-es és három 3-as szerepel. A kockát sokszor feldobjuk egymás után. Konvergál-e valahova (ha igen, milyen értelemben) a dobott számok szorzata?

B11.) [XI.10.] Legyenek $X \sim \text{Poi}(2)$ és $Y \sim \text{Poi}(3)$ független valószínűségi változók. Határozd meg $U = 2X + Y$ karakterisztikus függvényét, majd ennek segítségével számítsd ki U várható értékét!

B12.) [XI.17.] Karakterisztikus függvény a $\varphi(t)=\frac{1}{1+t^4}$ függvény?

SZ15.) Legyen φ karakterisztikus függvény. Bizonyítsuk be, hogy

a.) $4\mathrm{Re}(1-\varphi(t)) \geq \mathrm{Re}(1-\varphi(2t))$;

b.) $8(1-|\varphi(t)|) \geq 1-|\varphi(2t)|$.

SZ16.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges X valószínűségi változóra és $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényére teljesül a következő egyenlőtlenség: $|1-\varphi(t)| \leq E|tX|$! (1 pont)

53.) Számítsuk ki a következő n-szeres integrál értékét, ha $n\to\infty$: $\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \frac{x_1^4+\ldots+x_n^4}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\,dx_1\ldots dx_n$!

54.) Hamis érmével dobunk. 0,52 a fej valószínűsége.

a.) Becsüljük meg a CHT-vel annak valószínűségét, hogy 10000 dobásból legalább 5230 fej! Becsüld meg a becslés hibáját a Berry-Esséen tétellel!

b.) Hányszor kell dobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 97,5 %-os valószínűséggel több legyen, mint 0,505?

55.) Legyen X_n n paraméterű Poisson eloszlású. Mihez tart $n\to\infty$ esetén

a.) $\mathrm{P}(X_n<n)$;

b.) $\mathrm{P}(X_n<n-n^{1/2})$?

56.) Legyenek $X_1,\ldots,X_n \sim E(0,b)$ függetlenek, ahol $b>0$ valós paraméter. Legyen $Y_n = n\cdot\min(X_1,\ldots,X_n)$. Határozd meg Y_n határeloszlását, ha $n\to\infty$!

57.) Legyen $X_n\sim \mathrm{Geo}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Határozzuk meg $\frac{X_n}{n}$ határeloszlását, ha $n\to\infty$!

58.) Legyen X_n ~Negbin(n,p). Számítsuk ki $\frac{pX_n-n}{\sqrt{n(1-p)}}$ határeloszlását, ha $n\to\infty$!

59.) Legyenek X_i ~E(0,1), i=1,...,n független valószínűségi változók, és jelölje Y_n a maximumukat. Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(n(1-Y_n)>t\right)$

60.) Legyenek $X_1,X_2,\ldots$ független, azonos eloszlású, $\mu>0$ várható értékű és σ szórású nemnegatív valószínűségi változók. Legyen $S_n=X_1+\ldots+X_n$, és $t>0$ esetén $N(t)=\max\{k\geq 0: S_k\leq t\}$. Számítsd ki $\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}}$ határeloszlását, amint $t\to\infty$!

61.) Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$

B13.) [XI.24.] Egy szabályos kockát 3000-szer feldobunk egymás után. Határozd meg annak a valószínűségét a CHT-vel, hogy a 6-osok száma 470 és 560 között lesz! Becsüld meg a becslés hibáját a Berry-Esséen tétellel!

B14.) [XII.1.] Számítsd ki az alábbi határértéket: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k:\ \left|k-\frac{1}{2}n\right|\leq n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$

62.) Legyenek X_i ~Ind(p_i) $i=1,2,\ldots$ függetlenek, $Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-p_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)}}$. Mi a feltétele, hogy Y_n gyengén tartson egy normális eloszláshoz?

63.) Legyenek X_i ~E(0,1) $i=1,2,\ldots$ függetlenek. Mutassuk meg, hogy $P\left(\frac{4\sum_{i=1}^{n} iX_i-n^2}{n^{\frac{3}{2}}}<x\right)\xrightarrow{n\to\infty}\Phi\left(\frac{3x}{2}\right)$?

64.) Legyenek $X_1,X_2,\ldots$ független valószínűségi változók. Mely esetekben teljesítik a Lindeberg-feltételt?

a.) $P(X_i=i)=P(X_i=-i)=\frac{1}{2}$;

b.) $P(X_i=2^{\frac{i}{2}})=P(X_i=-2^{\frac{i}{2}})=\frac{1}{2}$.

SZ17.) Egy szabályos érmével addig dobunk, amíg mind a fejekből, mind az írásokból legalább k darabot nem kapunk. Jelölje ν_k az ehhez szükséges dobások számát. Számítsd ki $\frac{\nu_k-2k}{\sqrt{2k}}$ határeloszlását, amint $k\to\infty$. (2 pont)

SZ18.) Legyenek $X_1,X_2,\ldots$ független valószínűségi változók, $P(X_n=n^\alpha)=P(X_n=-n^\alpha)=\frac{1}{2}$, $k\geq 1$, ahol α rögzített valós szám. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor érvényes rájuk a CHT, ha $\alpha\geq -\frac{1}{2}$! (2 pont)

SZ19.) Legyenek $X_i\sim N(0,2^i)$ $i=1,2,\ldots$ függetlenek.

a.) Teljesül az $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra a Lindeberg-feltétel?

b.) Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{2^n-1}>1\right)$ határértéket! (2 pont)

SZ20.) Legyenek $X_1,X_2,\ldots$ függetlenek, $P(X_n=2^n)=P(X=-2^n)=2^{-2n-1}$ és $P(X_n=0)=1-2^{-2n}$. Teljesül az $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra a CHT? (1 pont)

65.) Legyen $X\sim E(-1,1)$, $Y=X^2$. Határozzuk meg

a.) Y legjobb négyzetes közelítését X tetszőleges függvénye segítségével;

b.) X legjobb négyzetes közelítését Y tetszőleges függvénye segítségével;

c.) X legjobb négyzetes közelítését Y lineáris függvénye segítségével!

66.) Teljes valószínűség tétele folytonos esetben.
Legyen A tetszőleges esemény, Y abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor bizonyítsuk be a teljes várható érték tétel segítségével, hogy
$P(A) = \int\limits_{\infty}^{\infty} P(A|Y = y) f_Y(y)\, dy.$

67.) Legyen (X, Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1\}$ egységkörlapon. Számítsuk ki az $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvényt és az $E(X^2|Y)$ feltételes várható értéket!

68.) Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású. Határozzuk meg az $X|Y$ feltételes eloszlást!

69.) Tegyük fel, hogy a magyar férfiak magassága és testsúlya kétdimenziós normális eloszlású. A férfiak átlagmagassága 178 cm, 9 cm szórással; átlagos testsúlyuk pedig 85 kg, 10 kg szórással. A magasság és a testtömeg közötti korreláció 0,7.

a.) Feltéve, hogy egy férfi 80 kg, mi a valószínűsége, hogy magasabb 180 cm-nél?

b.) Átlagosan mekkora súlyú egy 190 cm magas férfi?

c.) Átlagosan milyen magas egy 94,44 kg-os férfi?

70.) Legyenek X és Y egymástól független, standard normális eloszlásúak. Határozzuk meg karakterisztikus függvény segítségével $\frac{X}{Y}$ eloszlását! Használjuk fel, hogy tetszőleges $a, b > 0$ esetén $\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}}\, dx = \sqrt{\pi}\frac{e^{-2ab}}{2a}$.

71.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. Határozd meg az $E\left(X_1 \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$ feltételes várható értéket!

B15.) [XII.8.] Legyen (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{ha } 0 \le x \le y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.
Számítsd ki az $E(Y|X)$ feltételes várható értéket!

B16.) [XII.8.] Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen U az első dobás eredménye, V a második dobás eredménye, és $X = U + V$, valamint $Y = U - V$. Hogyan közelítsük Y-t X segítségével, ha

a.) csak lineáris függvényt használhatunk;

b.) tetszőleges függvényt alkalmazhatunk?

SZ21.) Legyen $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } -2 + x < y < 2 - x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
Határozd meg a c értékét, majd az $E(X|Y)$ és $E(X|Y^2)$ feltételes várható értékeket! (2 pont)

SZ22.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egyenletesek a diszkrét $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazon, jelölje $X_n^* = \max(X_1, \ldots, X_n)$-et. Mutasd meg, hogy $E(2X_1 - 1|X_n^*) = \frac{(X_n^*)^{n+1} - (X_n^* - 1)^{n+1}}{(X_n^*)^n - (X_n^* - 1)^n}$! (2 pont)

SZ23.) Legyenek X, Y valószínűségi változók, $r := R(X, Y)$. Bizonyítsuk be, hogy $E(D^2(Y|X)) \le (1 - r^2)D^2Y$! (2 pont)

72.) Jelölje S_n a számegyenes egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan mozgó pont helyzetét az n. lépés után, $S_0 = 0$. Mutassuk meg, hogy

a.) S_n martingál;

b.) S_n^2 szubmartingál, S_n^2 martingál;

c.) e^{S_n} szubmartingál, $\frac{e^{tS_n}}{\mathrm{ch}(t)^n}$ martingál.

73.) Mutassuk meg, hogy ha az X_n szubmartingálra $E(X_n) = E(X_1)$ minden n-re, akkor X_n martingál.

74.) Legyen $a, b > 0$, tegyük fel, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ és $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingálok. Mutassuk meg, hogy $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)$ és $(\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n)$ is szubmartingálok. Fogalmazzunk meg analóg állításokat szupermartingálokra!

75.) Lehet-e egyszerre X_n és X_n^2 is martingál az $X_1, \ldots, X_n$ által generált σ-algebrára nézve?

76.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. valószínűségi változók, $P(X_1 = -2) = \frac{1}{3}$, $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ és $P(X_1 = 4) = \frac{1}{6}$. Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Keressük meg az összes olyan α valós számot, amelyre $Y_n = e^{\alpha S_n}$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ σ-algebrára nézve!

SZ24.) Tekintsük a következő bolyongást: $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$, az X_i is a $+1$ és -1 értékeket veszi fel, de $P(X_i = X_{i-1}) = 1 - P(X_i = -X_{i-1}) = p$. Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mutassuk meg, hogy $Y_n = S_n + \frac{X_n}{2(1-p)}$ martingál! (1 pont)

SZ25.) Jelölje S_n szimmetrikusan bolyongó pont helyzetét az n. lépés után. Keressünk minél több olyan p kétváltozós polinomot, amire $p(S_n, n)$ martingál! (1 pont)
