Idősorok és többdimenziós statisztika gyakorlat
Matematika alapszak, matematikai elemző szakirány
2018/2019 őszi félév

Játékszabályok

- A gyakorlatokról maximum 3-szor lehet hiányozni. Aki többször hiányzik, nem kap gyakjegyet.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - · 30 pont: B jelű beadandó feladatok (3 pont · 10)
  - · 30 pont: számítógépes/szimulációs beadandó feladatok (15 pont · 2)
  - · 40 pont: ZH: XII.10., É -1.62
  - · x pont: SZ jelű szorgalmi feladatok
- A ZH-n minimálisan teljesíteni kell 30 %-ot. Ha a ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. A jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t kell írnod, a beadandókért kapott pontok megmaradnak. GyakUV írása esetén legfeljebb 2-est lehet szerezni, bármennyi is az összpontszám.
- A ZH-kon használható: **számológép** és egy legfeljebb A4-es méretű lapra KÉZZEL írott "puska".
- B jelű beadandók: Mindegyik maximálisan 3 pontot ér, a legjobb 10-et veszem figyelembe. Több feladatot is kihirdetek, amik közül ízlés szerint válogathattok. A beadandók célja, hogy folyamatosan tanuljatok, gyakoroljatok, ezért fix határidőig lehet őket benyújtani.
- Számítógépes/szimulációs beadandók: kettőt hirdetek ki fix határidővel, mindegyikkel maximálisan 15 pontot lehet szerezni.
- A beadandóknál nem tilos, sőt, bizonyos fokig még kívánatos is a közös munka/konzultáció hallgatótársaiddal – az viszont elvárás, hogy **a gondolataidat önállóan írd le**! Amennyiben nyilvánvaló másolás gyanúja merül fel, az érintettek 0 pontban részesülnek.
- Osztályozás:

elégtelen (1)	0	–	34,99
elégséges (2)	35	–	49,99
közepes (3)	50	–	64,99
jó (4)	65	–	79,99
jeles (5)	80	–	∞^3

Infók a gyakvezetőről

Név	Varga László, *óraadó*
Munkahely	Morgan Stanley, Risk Management
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
E-mail	vargal4@cs.elte.hu
Honlap	vargal4.elte.hu

1.) Számítsd ki az $\int_a^b g(x)\,dh(x)$ Riemann-Stieltjes integrált, amennyiben

	a	b	$g(x)$	$h(x)$
a.)	0	10	$2x$	$I(x=4)+I(x\le 7)-2I(x\ge 3)$
b.)	$-\infty$	∞	$\begin{cases}4 & \text{ha } x\le 0\\ 3-4x & \text{ha } 0<x<1\\ -1 & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$	$\begin{cases}0 & \text{ha } x\le -1\\ 2 & \text{ha } -1<x<1\\ 0 & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$
c.)	0	3	x	$\begin{cases}x^2 & \text{ha } x<2\\ x^3 & \text{ha } x\ge 2\end{cases}$
d.)	e	π	$[x] \rightsquigarrow$ egészrész fv.	$\{x\} \rightsquigarrow$ törtrész fv.
e.)	-1	2	$\lvert x\rvert$	$\{x\}$

2.) Legyen $F(x)=\begin{cases}a & \text{ha } x\le 0\\ \frac{x}{2} & \text{ha } 0<x\le 1\\ bx+c & \text{ha } 1<x\le 2\\ 1 & \text{ha } 2<x\end{cases}$

a.) Határozd meg az ismeretlen valós a, b és c valós paraméterek lehetséges értékeit, ha a fenti $F(x)$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye!
b.) Határozd meg X várható értékét és szórását!
c.) Milyen eloszlású X, ha X abszolút folytonos?

3.) Legyen $F(x)=\begin{cases}a_1+a_2e^{x} & \text{ha } x\le 0\\ b_1+b_2e^{-x} & \text{ha } x>0\end{cases}$

a.) Határozd meg az ismeretlen valós a_1, a_2, b_1 és b_2 paraméterek lehetséges értékeit, ha a fenti $F(x)$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye!
b.) Határozd meg az ismeretlen paramétereket, ha X abszolút folytonos és $EX=0$!

4.) Tekintsük a következő egyszerű csapadékmodellt: p annak az esélye, hogy Nagykutyavásárházán szeptember 18-án nem esik csapadék. Amennyiben van csapadék, akkor a csapadék eloszlása (feltételesen) exponenciális eloszlásúnak tekinthető λ paraméterrel. Az előző 20 évben megfigyelt csapadékmennyiségek mm-ben:
0, 5, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0.
a.) Határozd meg a paraméterek ML-becslését!
b.) Becsüljük meg a csapadékmennyiség eloszlásfüggvényét, valamint annak a valószínűségét, hogy legalább 5 mm csapadék lesz idén szeptember 18-án!
c.) Becsüljük meg a modellből a csapadék várható értékét és szórását!

5.) Marcsi reggel 8-ra metróval utazik a suliba otthonról. Tapasztalata szerint átlagosan minden harmadik reggel azonnal be tud szállni egy szerelvénybe várakozás nélkül. Ha várakoznia kell, akkor átlagosan 1 perc alatt fut be az állomásra a következő metró. Modellezzük az X várakozási időt!
a.) Becsüld meg annak a valószínűségét, hogy legalább 1,5 percet kell várakoznia!
b.) Becsüld meg a várakozási idő szórását!

6.) Egy biztosítót megkeres egy magánkórház, mert biztosítást szeretne kötni a benne működő mágneses rezonancia (MR) készülék meghibásodása esetére. Egy ilyen röntgen több száz millió forintba kerül és hiba esetén a javítás várhatóan 15 millió forintot tenne ki. A biztosító és a kórház olyan szerződést kötnek, amely szerint a biztosító a teljes kárt kifizeti, amennyiben az nem haladja meg a 20 millió forintot, azonban 20 millió forintnál magasabb kár esetén csak 20 millió forintot térít meg. A szerződés csak az első meghibásodásig érvényes, szakértők szerint az első meghibásodás normál használati intenzitás esetén a 3. és a 4. év között várható.

a.) Határozd meg a magánkórháznak kifizetendő kártérítési összeg eloszlásfüggvényét és várható értékét, amennyiben a kár nagysága exponenciális eloszlást követ!

b.) A magánkórház havonta szeretne fizetni egy fix biztosítási díjat. A biztosító számára várhatóan mi lenne az a biztosítási havidíj, ami felett megérne ilyen szerződésbe belemenni? Az egyszerűség kedvéért tekintsünk el attól, hogy a pénz az idő múlásával veszít az értékéből, azaz tekintsük a kamatlábat 0-nak.

B1.) **[IX.24]** Számítsd ki az $\int_{-5}^{5} g(x)\,dh(x)$ Riemann-Stieltjes integrált, amennyiben

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } x < 1 \\ 2x^3 & \text{ha } 1 \le x < 3 \\ 2^x & \text{ha } x \ge 3 \end{cases} \quad \text{és} \quad h(x) = \begin{cases} |x| & \text{ha } x \le 1 \\ 2x & \text{ha } 1 < x \le 4 \\ 3^x & \text{ha } x > 4 \end{cases}.$$

B2.) **[IX.24]** Egy gyalogosoknak jelző közlekedési lámpa egész nap piros és zöld között váltakozik, 2 percig piros, fél percig pedig zöld. Tegyük fel, hogy véletlen időpontban érkezünk meg a lámpához, jelölje X a várakozási időt.

a.) Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy legalább 1 percet kell várakozni!

b.) Határozd meg X eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását! (1+2= 3p)

SZ1.) Legyen $F(x)$ eloszlásfüggvény és $a \in \mathbb{R}$ pozitív szám. Számítsuk ki a következő integrált: $\int_{-\infty}^{\infty} [F(x+a) - F(x)]\,dx$ (1p)

SZ2.) Legyen $f_X(x) = 2xI(0 < x < 1)$, $Y = g(X) = \begin{cases} 4X & \text{ha } 0 \le X \le \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \text{ha } \frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4} \\ 3 - 2X & \text{ha } \frac{3}{4} < X \end{cases}$.

Határozd meg Y eloszlásfüggvényét és várható értékét! (2p)

SZ3.) Határozd meg a 4. feladatban leírt modell paramétereinek momentum becslését a csapadék elméleti várható értéke és szórása alapján! (2p)

7.) A sarki zöldségesben a nektarin kilóját a minőségétől függően változó áron árulják 400 és 600 forint között. Tegyük fel, hogy az ár egyenletes eloszlást követ. Összesen 1000 forintot szánok nektarinra, jelölje Y azt a valószínűségi változót, hogy hány kiló nektarint tudok vásárolni az 1000 forintomból. Add meg Y sűrűségfüggvényét! Várhatóan hány kiló nektarint fogok tudni venni?

8.) Legyenek $X, Y \sim E(0;1)$ függetlenek. Határozd meg a következő transzformáltak sűrűségfüggvényét: a.) $X + Y$; b.) $X - Y$; c.) XY.

9.) Legyenek $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ függetlenek. Milyen ismert eloszlást követ az $\frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$ valószínűségi változó?

10.) Szandi minden nap villamossal és busszal közlekedik, hogy eljusson az egyetemre. Az alábbi ábra tartalmazza a közlekedési időket:

Ott-hon	$\xrightarrow{\text{gyalog}}$ 5 p	Villamos-megálló	$\xrightarrow{\text{villamossal}}$ 10 p	$\xrightarrow{\text{gyalog}}$ 2 p	Busz-megálló	$\xrightarrow{\text{busszal}}$ 8 p	$\xrightarrow{\text{gyalog}}$ 5 p	**Egye-tem**

Tapasztalatai alapján átlagosan 2 percet vár a villamos megállójában és 4 percet a busz megállójában. Szandi ma reggel később ébredt fel, ezért csak 7:43-kor indult el otthonról, az első órája 8:15-kor kezdődik. Becsüljük különböző, értelmes valószínűségi modellek segítségével annak a valószínűségét, hogy el fog késni!

11.) **Box-Müller transzformáció.** Legyenek $X_1, X_2 \sim E(0,1)$ függetlenek. Legyenek $Y_1 = \sqrt{-2\log X_1}\cos(2\pi X_2)$, $Y_2 = \sqrt{-2\log X_1}\sin(2\pi X_2)$. Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ függetlenek!

12.) Legyenek $X \sim \chi_p^2$, $Y \sim \chi_q^2$ függetlenek! Mutassuk meg, hogy $U = X + Y$ és $V = \frac{X}{X+Y}$ függetlenek, és határozzuk meg az eloszlásukat!

13.) Mely c valós paraméter esetén lesz kétdimenziós sűrűségfüggvény $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 2x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$? Adjuk meg a peremsűrűségfüggvényeket és a kovarianciamátrixot! $P\left(X > \frac{1}{2},\ Y < 1\right) = ?$

14.) Legyen X és Y független standard normális eloszlású. Határozzuk meg $\begin{pmatrix} 2X + 3Y \\ -X + Y \end{pmatrix}$ együttes sűrűségfüggvényét és kovarianciamátrixát!

15.) Legyen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ sűrűségfüggvénye a következő:

$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, x_3) = a \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2+1}{2}\right)^2 + \left((x_3-2)^2\right)\right\}\right.$, ahol $a \in \mathbb{R}$.

a.) $a = ?$ b.) $\Sigma(\mathbf{X}) = ?$ c.) $f_{X_1,X_3} = ?$ d.) $P(X_1 < 0,\ X_3 < 1) = ?$

B3.) **[X.1.]** Juliska néni a városi piacon értékesíti almáját. Mind az értékesítési mennyiség, mint az ár véletlennek tekinthető (lehet vele alkudozni). Az egy nap alatt eladott mennyiség (kg) Pareto-eloszlású $\frac{5}{4}$ és 10 paraméterekkel, míg az eladott almák ára (Ft/kg) egyenletes eloszlású 180 és 220 paraméterekkel. Tegyük fel, hogy a mennyiség és az ár függetlenek egymástól. Költségei naponta 4000 forintot tesznek ki (benzinköltség).

a.) Várhatóan mennyi profitra fog szert tenni egy nap alatt?

b.) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy Juliska néni napi profitja meghaladja az 5000 forintot! (1+2= 3p)

B4.) **[X.8.]** Legyen az $(X,Y)^T$ pont egyenletes eloszlású a $(-1,0), (0,0), (0,1)$ pontok által meghatározott háromszögben. Mi lesz az $(X,Y)^T$ kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

B5.) **[X.8.]** Legyen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ sűrűségfüggvénye a következő:

$f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,x_3) = a\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{8}-x_3^2+\frac{x_2}{2}-\frac{1}{2}\right\}$, ahol $a\in\mathbb{R}$ alkalmas szám.
a.) $a=?$ b.) $P(X_1<0, X_2>2, X_3<1)=?$ c.) $\Sigma(\mathbf{X})=?$ (1+1+1= 3p)

SZ4.) Legyenek $X, Y \sim N(0,1)$ eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Határozd meg $U=\frac{X}{Y}$ sűrűségfüggvényét és várható értékét! Milyen nevezetes eloszlást követ U? (2p)

SZ5.) Legyenek $X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek.
Legyen $Y_i = \frac{X_i}{\sum_{i=1}^n X_i}$ $i=1,\ldots,n-1$ esetén és $Y_n=\sum_{i=1}^n X_i$. Számítsuk ki $\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ együttes sűrűségfüggvényét. Függetlenek a koordináták? (2p)

SZ6.) Mely c-re lesz kétdimenziós sűrűségfüggvény az alábbi? Adjuk meg a peremsűrűségfüggvényeket és a kovarianciamátrixot!
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c\cdot\max\{x,y\} & \text{ha } (x,y)\in(0,1)^2 \\ 0 & \text{különben}\end{cases} \qquad (2p)$$

16.) Határozd meg X eloszlását az $X+Y=l$ feltétel mellett, valamint számítsd ki az $E(X|X+Y=l)$ feltételes várható értéket, amennyiben
a.) $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ és $Y\sim\mathrm{Bin}(m,p)$ függetlenek;
b.) $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$ és $Y\sim\mathrm{Poi}(\mu)$ függetlenek;
c.) $X\sim\mathrm{Geo}(p)$ és $Y\sim\mathrm{Geo}(p)$ függetlenek.

17.) Legyen (X,Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$ egységkörlapon. Számítsuk ki az $E(X|Y)$ feltételes várható értéket és a $D^2(X|Y)$ feltételes szórásnégyzetet!

18.) Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y}I(x>0,y>0)$.
a.) Határozd meg Y peremeloszlását!
b.) Milyen eloszlású X az $Y=y$ feltétel mellett? $E(X|Y)=?$

19.) Legyen c alkalmas valós szám, X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y)=(cx+1)\cdot I(x>0,\ y>0,\ x+y<1)$.
a.) $c=?$ b.) $P(X<2Y^2)=?$ c.) $E(Y|X)=?$

20.) Legyen (X,Y) kétdimenziós normális eloszlású. Határozzuk meg az $X|Y$ feltételes eloszlást!

21.) Tegyük fel, hogy a magyar férfiak magassága és testsúlya kétdimenziós normális eloszlású. A férfiak átlagmagassága 178 cm, 9 cm szórással; átlagos testsúlyuk pedig 85 kg, 10 kg szórással. A magasság és a testtömeg közötti korreláció 0,7.
a.) Feltéve, hogy egy férfi 80 kg, mi a valószínűsége, hogy magasabb 180 cm-nél?
b.) Átlagosan mekkora súlyú egy 190 cm magas férfi?
c.) Átlagosan milyen magas egy 94,44 kg-os férfi?

22.) Egy egységnyi hosszúságú pálcát előbb találomra ketté törünk, majd a hosszabbik darabot újra találomra ketté törjük. Mi a valószínűsége, hogy az így kapott 3 pálcából háromszög rakható össze?

B6.) **[X.15.]** Legyen (X,Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & \text{ha } 0\le x\le y \\ 0 & \text{különben}\end{cases}.$$
Számítsd ki az $E(Y|X)$ feltételes várható értéket és a $D(Y|X)$ feltételes szórást!

SZ7.) Legyen $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c & \text{ha } 0<x<2 \text{ és } -2+x<y<2-x \\ 0 & \text{különben}\end{cases}$
Határozd meg a c értékét, majd az $E(X|Y)$ feltételes várható értékeket! (1p)

SZ8.) Legyenek $X_i\sim\mathrm{Geo}(p)$, $i=1,\ldots,n$ függetlenek, továbbá $Y=I(X_1=1)$, $Z=\sum_{i=1}^n X_i$. Határozd meg az $E(Y|Z)$ feltételes várható értéket! (2p)

SZ9.) Tegyük fel, hogy egy gyorsúszó alvásideje normális eloszlásúnak tekinthető 8 óra várható értékkel és 1 óra szórással. Tegyük fel továbbá, hogy amennyiben x órát alszik, akkor a 100 méter gyorsúszáson elért ideje ugyancsak normális eloszlású $58-x$ mp várható értékkel és 1 mp szórással. Számold ki annak a valószínűségét, hogy a gyorsúszó megdönti a 100 méter gyorsúszás 46,91 mp-es világcsúcsát! (2p)

23.) Legyen X_t *véletlen bolyongás drift*-tel: $X_t=\delta+X_{t-1}+\varepsilon_t$ $(t=1,2,\ldots)$, ahol δ valós paraméter, $P(X_0=0)=1$ és $\varepsilon_t\sim WN(0,\sigma^2)$.
a.) Fejezzük ki X_t-t a fehér zaj folyamat segítségével!
b.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?
c.) Szimuláljunk egy ilyen folyamatot normális innovációk, $\delta=-1,0,1$, valamint $\sigma=1,5,10$ esetén, majd ábrázoljuk X_t-t, a trendet és az autokorreláció függvényét!
d.) Van-e olyan $\varphi(X_t,X_{t-1},\ldots)$ transzformáció, amivel származtatott folyamat már stacionárius?

24.) Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}=U\sin(2\pi\alpha t)+V\cos(2\pi\alpha t)$, ahol α valós paraméter, U és V egymástól független, 0 várható értékű és τ szórású val. változók.
a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?
b.) Legyen $Y_t=X_t+\varepsilon_t$, ahol ε_t fehér zaj. Szimuláljunk egy fehér zajt $D\varepsilon_t=1,2,4,8$ esetén, készítsük el hozzá Y_t-t, ha $\tau=2$ és $\alpha=1$, majd ábrázoljuk X_t és Y_t idősorokat! Értelmezzük a látottakat!

B7.) **[XI.12.]** Legyen $X_t=\frac{1}{2}\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}+\frac{1}{4}\varepsilon_{t-2}$ $(t\in\mathbb{Z})$, ahol ε_t fehér zaj. Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?

SZ10.) Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ stacionárius Gauss-folyamat (azaz minden $k\in\mathbb{Z}_+$-ra és $t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{R}$-re $(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ együttesen normális eloszlású) és $Y_t=e^{X_t}$.
a.) Határozd meg az X_t folyamat momentumgeneráló függvényét, azaz $M_{X_t}(s)=E(e^{sX_t})$-t!
b.) Mutasd meg, hogy az Y_t folyamat gyengén stacionárius! (1+1= 2p)

SZ11.) Legyen $X_t=\sin(2\pi Ut)$ $(t=1,2,\ldots)$, ahol $U\sim E(0;1)$. Mutassuk meg,

hogy X_t folyamat gyengén stacionárius, de erősen *nem* stacionárius! (2p)
Útmutatás az erős stacionaritás vizsgálatához: számoljuk ki a következő két valószínűséget: $P\left(X_1 < -\frac{\sqrt{3}}{2}, X_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $P\left(X_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}, X_3 < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$!

25.) Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ Poisson-folyamat λ intenzitással. Mutasd meg a Poisson-folyamat alábbi tulajdonságait:

a.) az autokovariancia függvénye $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \lambda \cdot \min(t, s)$;
b.) ha $t > s$, akkor $X_s|X_t \sim \mathrm{Bin}\big(X_t, \frac{s}{t}\big)$;
c.) ha $t < s$, akkor $X_s|X_t \sim\ X_t{+}\mathrm{Poi}\big(\lambda(s-t)\big)$.

26.) Tegyük fel, hogy a tűzoltóság telefonközpontjába a hívások Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 4 hívás.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első órában kettőnél kevesebb hívás érkezik?
b.) Mennyi annak az együttes bekövetkezési valószínűsége, hogy 6 és 7 óra között 3, 6 és 9 óra között 13, valamint 6 és 11 óra között 20 hívás érkezik?
c.) Mennyi annak az együttes bekövetkezési valószínűsége, hogy 6 és 8 óra között 2, valamint 7 és 10 óra között 4 hívás érkezik?
d.) Átlagosan mennyi idő telik el két hívás között?
e.) Átlagosan/várhatóan mennyi hívás érkezik be 10 és 12 óra között? Mennyire változékony ez az átlagos érték?
f.) Feltéve, hogy az első órában hat hívás érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy a második órában legalább két hívás jön?
g.) Várhatóan mikor érkezik a 15. hívás?
h.) Feltéve, hogy a $t = 1$ időpont előtt nem érkezett be hívás, milyen eséllyel érkezik be az 1. hívás $t = 3$ után?
i.) Feltéve, hogy a 3. hívás $t = 2$ időpontban érkezett be, milyen eséllyel érkezik be a 4. hívás $t = 4$ után?
j.) Feltéve, hogy a $t = 3$ időpontig 10 hívás érkezett be, mi a valószínűsége, hogy $t = 1$-ig 4 hívás érkezett be?
k.) Feltéve, hogy a $t = 3$ időpontig 10 hívás érkezett be, mennyi a $t = 1$-ig beérkező hívások várható értéke és szórása?
l.) Feltéve, hogy a $t = 3$ időpontig 10 hívás érkezett be, mi a valószínűsége, hogy $t = 5$-ig 15 hívás érkezik be?
m.) Feltéve, hogy a $t = 3$ időpontig 10 hívás érkezett be, mennyi a $t = 5$-ig beérkező hívások várható értéke és szórása?

27.) Egy banki ügyintézőhöz a pénzt felvenni szándékozók $\lambda = 8$ fő/óra intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek. A pénzt befizetni szándékozók ettől függetlenül, $\mu = 2$ fő/óra intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek.

a.) Mennyi az esélye, hogy fél óra alatt legfeljebb ketten érkeznek a banki ügyintézőhöz?
b.) Feltéve, hogy 1 óra alatt 8 ügyfél érkezik, mennyi az esélye, hogy ebből hárman szeretnének pénzt befizetni?
c.) Mi a valószínűsége, hogy nyitást követően előbb érkezik 5 ügyfél pénzfelvételi célból, mielőtt egy pénzbefizető ügyfél betérne?
d.) Mi a valószínűsége, hogy nyitást követően előbb érkezik 5 ügyfél pénzfelvételi célból, mielőtt 2 pénzbefizető ügyfél betérne?

28.) Vivien és Cica éjjel a Hollywood Boulevard egyik utcasarkán álldogálnak "ügyfelekre" várva (á la Pretty Woman című film, nyitójelenet). A lányok megállapodtak abban, hogy ezen a napon az 1. "ügyfél" Viviené lesz. Tegyük fel, hogy ilyenkor 5 perc alatt átlagosan 10 autó halad el a lányok mellett, az elhaladó autósok $\frac{1}{10}$ eséllyel ajánlanak helyet maguk mellett az autóban egy hölgynek. Mi az esélye, hogy Cicának aznap több, mint 15 percet kell várnia egy "ügyfélre"?

B8.) **[XI.19.]** Egy biztosítóhoz a károkat Poisson-folyamat szerint jelentik be 0,5 kár/hét intenzitással.

a.) Mi az esélye, hogy a 6. káresetet 3 héttel az 5. káreset után jelentik be?
b.) Mi az esélye, hogy a 2. káreset a 3. hét után következik be?
c.) Ha az első 3 héten 2 káreset következett be, akkor milyen eséllyel következik be 4 káreset az első 5 héten? (1+1+1= 3p)

B9.) **[XI.19.]** Egy biztosítóhoz a károkat Poisson-folyamat szerint jelentik be 0,5 kár/hét intenzitással.

a.) Mi annak az együttes valószínűsége, hogy az első három héten 2, a 4-7. hetekben pedig összesen 3 kárt jelentettek be?
b.) Határozd meg a 13. bejelentett kár időpontjának várható értékét és szórását!
c.) Ha az első 5 héten 4 káreset következett be, akkor milyen eséllyel következik be 3 káreset az első 2 héten? (1+1+1= 3p)

B10.) **[XI.19.]** Egy teaüzletbe óránként átlagosan 10 vevő tér be, egy vásárló $\frac{1}{2}$ eséllyel nő vagy férfi. Tekintsük a vevők számát Poisson-folyamatnak. *Tegyük fel*, hogy délelőtt 8 és 9 között 10 női vásárló ment be. Ezzel a feltétellel, számold ki a következő események valószínűségét: 8 és 9 között

a.) pontosan 10 férfi is betért a boltba;
b.) legalább 20 vevő ment be a boltba. (1+2=3p)

B11.) **[XI.19.]** Egy tejivóba betérő vendégek vagy tejet, vagy teát isznak. A tejet kérők száma Poisson-folyamatot követ 2 vendég/perc intenzitással, míg a teát kérők száma az előző folyamattól független Poisson-folyamat 1 vendég/perc intenzitással. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy nyitás után előbb érkezik be a 2. teát kérő vendég, mint a 3. tejet kérő vendég!

SZ12.) Legyen X_t Poisson-folyamat, τ_i az i-edik esemény bekövetkezési időpontja. Mutasd meg, hogy $\tau_1|X_t = 1 \sim E(0;t)$, azaz ha tudjuk, hogy a t időpontig pontosan 1 esemény következett be, akkor ennek az eseménynek a bekövetkezési időpontja egyenletes eloszlású a $(0;t)$ intervallumon. (1p)

SZ13.) Négy bolha oda-vissza ugrál Vili a vizsla és Leó a labrador között. Az ugrások időpontjait független, $\lambda = 3$ ugrás/perc intenzitású Poisson-folyamatok adják meg. Kezdetben az összes bolha Vilin tanyázik. Adjuk meg 5 perc múlva a Vilin lévő bolhák számának eloszlását! (2p)

SZ14.) Tegyük fel, hogy a tűzoltóság telefonközpontjába a hívások Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 4 hívás. Feltéve, hogy az első 3 órában 11 hívás érkezett, várhatóan mikor érkezett ezek közül az utolsó (tehát a 11.)? (2p)

29.) A 0 időpontban 2000 Ft-om van. Az $1, 2, \ldots$ időpontokban 1000 Ft értékű fogadásokat kötök. A fogadást p valószínűséggel megnyerem, $1 - p$ valószínűséggel pedig elveszítem. Célom az, hogy a tőkémet 4000 Ft-ra növeljem, amint ez teljesül, befejezem a játékot. A játéknak akkor is vége van, ha tőkém 0 Ft-ra esik. Legyen X_t a t-edik fogadás után a tőkém nagysága.

a.) Mutasd meg, hogy X_t Markov-lánc, határozd meg az állapotteret és az átmenetvalószínűségi mátrixot! Ábrázold a Markov-lánc gráfját és osztályozd az állapotokat!

b.) Mi az esélye, hogy 4000 Ft-tal / 0 Ft-tal fejezem be a játékot, ha $p = 0,6$?

c.) Várhatóan hány lépésben fejeződik be a játék, ha $p = 0,6$?

d.) Nézzük meg, konvergál-e az átmenetmátrix n-edik hatványa $n \to \infty$ esetén!

30.) Modellezzük egy egyetem matematika BSc szakos hallgatóit Markov-lánccal! Az elsőévesek 10%-a évet ismétel, 10% hagyja ott végleg a matek alapszakot, a többiek a következő évtől másodévesek lesznek. A másodév a legnehezebb, a másodévesek 20%-a ismétel évet és 15%-uk adja fel végleg a szakját. A harmadévesek 10%-a ismétel évet, és 5%-uk dönt az alapszak elhagyása mellett, a többiek elvégzik a szakot.

a.) Határozd meg a Markov-lánc állapotterét és az átmenetvalószínűségi mátrixot! Ábrázold a Markov-lánc gráfját és osztályozd az állapotokat!

b.) Milyen valószínűséggel lesz egy elsőéves hallgatóból pontosan 2 év múlva harmadéves?

c.) Milyen valószínűséggel lesz egy elsőéves hallgatóból pontosan 3 év múlva harmadéves?

d.) Milyen valószínűséggel hagyja el egy elsőéves hallgató végzettség nélkül a matematika alapszakot?

e.) Mi az esélye annak, hogy egy másodéves hallgató elvégzi a szakot?

f.) Várhatóan hány évig lesz egy másodéves hallgató másodéves?

g.) Várhatóan hány év alatt fejezi be egy elsőéves egyetemista a szakját?

h.) A visszajelzések szerint a munkaerőpiac évente 50 matematika alapszakos hallgatót képes felszívni. Ha a hallgatóknak várhatóan a 40%-a tovább szeretne tanulni valamilyen mesterszakra, akkor az egyetemnek hány gólyát érdemes felvennie a szakra?

i.) Tegyük fel, hogy "sok" éven keresztül, minden évben 60 hallgatót vesznek fel matematika alapszakra és más egyetemekről nem jönnek át másod-, illetve harmadévesek erre a szakra. "Sok-sok" év múlva várhatóan hány hallgató fog tanulni az egyes évfolyamokon? Ha egy hallgató képzése egy félévre 200 ezer Ft, akkor a szak összesen mennyi pénzébe kerül 1 félév során az államnak?

31.) Tegyük fel, hogy a kóla iparágban kétféle termék van: Coke és Poke. Ha egy személy legutóbb Coke-ot vett, akkor 90% eséllyel legközelebb is Coke-ot vesz. Amennyiben legutóbb Poke-ot ivott, akkor 80% valószínűséggel a következő vásárlás során is Poke-ot fog venni. Tegyük fel, hogy kezdetben a Coke gyártója a piac 60%-át uralja.

a.) Ábrázold a Markov-lánc gráfját, írd fel az átmenetvalószínűség mátrixot és osztályozd az állapotokat!

b.) Ha egy vásárló Poke-ot iszik, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a mostantól számított 2. vásárláskor Coke-ot fog inni?

c.) Ha egy vevő Coke-ot iszik, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a mostantól számított 3. vásárláskor is Coke-ot fog inni?

d.) Számítsuk ki a két márka piaci részesedését (a fogyasztók hány %-a fogyasztja az egyiket és a másikat) a 3. időpont után!

e.) Vizsgáljuk meg szimulációval az n lépéses átmenetvalószínűség mátrixot és a két márka piaci részesedését $n \to \infty$ esetén!

f.) Számítsd ki a stacionárius valószínűségeket!

g.) Tegyük fel, hogy egy fél literes kóla ára 300 Ft, előállítási költsége pedig 200 Ft. Felmérésekből kiderítették, hogy kólát rendszeresen 120 ezer ember fogyaszt, ők hetente átlagosan 1-et isznak meg. Számoljunk 52 héttel egy évben. Számítsd ki, hogy a Coke és a Poke gyártója (hosszú távon) mekkora profitra tesznek szert 1 év alatt!

h.) Ha Peti ezen a héten Coke-ot fogyaszt, akkor várhatóan hány hét múlva fogyasztja el a következő Coke-ot?

32.) Egy országban a családok három csoportba oszthatók: városban, városok vonzáskörzetében vagy vidéken élők. Egy évben a városlakó családok 15%-a átköltözik a vonzáskörzetbe és 5%-a vidékre költözik; ugyanakkor a vonzáskörzetben élők 6%-a városba és 4%-a vidékre költözik; végül a vidéki lakosság 4%-a a városokba és 6%-a a városok vonzáskörzetébe települ át. Jelenleg a családok 40%-a városokban, 35%-a pedig a városok vonzáskörzetében él.

a.) Ha egy család városban lakik, akkor mi a valószínűsége, hogy 2 év múlva is városban fog lakni?

b.) Két év múlva a családok hány %-a fog városban élni?

c.) Ha ez a modell hosszú távon jól írja le a lakosok költözési viselkedését, akkor hogyan fog alakulni az ország lakóhely szerinti megoszlása?

33.) A Google által használt **PageRank** algoritmus a keresőben talált oldalakat sorrendbe állítja, egyszerűsített változata a következőképpen írható le.
Tekintsünk egy Markov-láncot, melynek gráfját jelölje $G = (V, E)$, ennek csúcshalmaza az adott adatbázisban található oldalak, továbbá $(u, v) \in E$ ha az u oldalról mutat link a v oldalra, az élre pedig az $\frac{1}{d_{ki}(u)}$ számot írjuk, ahol $d_{ki}(u)$ az u csúcsból más csúcsokba mutató élek száma (ki-fokszám). Amennyiben egy oldal semelyik másik oldalra se mutat, akkor egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen választunk egy oldalt és oda ugrunk, azaz az összes többi csúcshoz berajzolunk élet, és az azo-

nos $\frac{1}{|V|-1}$ számokat írunk rájuk. A Markov-lánc stacionárius eloszlása adja meg az oldalak rangszámait, minél nagyobb a szám, annál "fontosabb" az adott oldal. Tekintsünk egy olyan esetet, amikor összesen az (a, b, c, d) négy oldal van egy adatbázisban a következő linkekkel: $a \to b$, $b \to c$, $d \to c$, $b \to d$.

a.) Írjuk fel a PageRank által meghatározott bolyongás állapotmátrixát és osztályozzuk az állapotokat!

b.) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást, majd adjuk meg az oldalak sorrendjét!

B12.) **[XI.26.]** Egy urna a kiinduló helyzetben két festetlen golyót tartalmaz. Véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót és feldobunk egy pénzérmét. Ha a választott golyó festetlen és fejet dobunk, akkor a kiválasztott festetlen golyót pirosra festjük; ha a választott golyó festetlen és írást dobunk, akkor a kiválasztott festetlen golyót feketére festjük. Ha a golyó már korábban meg lett festve, akkor átfestjük a másik színre. Jelöljük az urna állapotát az alábbi számhármassal: (i, j, k), ahol i az urnában lévő festetlen, j a piros, k pedig a fekete golyók száma. Legyen X_t az urna állapota a t-edik lépés után. Mutasd meg, hogy X_t Markov-lánc és határozd meg az átmenetvalószínűségi mátrixot!

B13.) **[XI.26.]** Tekintsük a 31. feladat történetét. Egy reklámügynökség megkeresi a Coke tulajdonosát egy olyan ajánlattal, hogy a márkát rendkívül menővé fogják tenni vagány TV-reklámokkal, ezáltal annak a valószínűsége, hogy egy fogyasztó a következő héten a másik márkát fogyasztja, 10%-ról 5%-ra fog lecsökkenni. A reklámkampányra 50 millió Ft-os ajánlatot adnak. Számításokkal alátámasztva adj tanácsot, a Coke tulajdonosának érdemes-e belekezdeni a reklámkampányba!

B14.) **[XII.3.]** Egy vállalat telefonon értékesíti termékét. Tekintsünk egy potenciális vevőt, akit még nem hívott fel a cég képviselője – az 1. hívás után 60% az esélye, hogy az illető lanyha érdeklődést fog tanúsítani a termék iránt, 30% eséllyel komolyan fog érdeklődni és 10% eséllyel a vállalat törölni fogja a potenciális vevők köréből. Az a vevő, aki korábban lanyha érdeklődést mutatott, a következő hívás során 20% eséllyel továbbra is alacsony érdeklődést fog mutatni, 30% valószínűséggel komoly érdeklődő lesz, 30% eséllyel megveszi a terméket és 20% eséllyel törölni kell a listából. A korábban komolyan érdeklődő potenciális ügyfél a következő hívás során 10% eséllyel alacsony érdeklődést fog mutatni, 40% valószínűséggel továbbra is komoly érdeklődő marad, míg 50% eséllyel megvásárolja a terméket.

a.) Mi az esélye, hogy egy potenciális vevő megveszi a terméket?

b.) A vállalat átlagosan hányszor fog felhívni egy potenciális vevőt?

SZ15.) Tekintsük a szimmetrikus bolyongást az $n \geq 5$ hosszú körön. Tegyük fel, hogy az éleken oda-vissza lehet közlekedni. Add meg az átmenetmátrixot és osztályozd az állapotokat! Határozd meg a stacionárius eloszlást! (1p)

SZ16.) Legyen $\{X_k,\ k \geq 0\}$ homogén Markov-lánc $S = \{0, 1, 2\}$ állapottérrel, $X_0 = 1$, az átmenetvalószínűség mátrix $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$. Mutasd meg, hogy az $Y_k = I(X_k \geq 1)$ folyamat nem Markov-lánc! (2p)

SZ17.) Egy gépjármű-biztosítással foglalkozó vállalat ügyfeleinek az alapján határozza meg a biztosítási díjat, hogy volt-e balesetük az előző két évben. Ha egy ügyfélnek az elmúlt két évben nem volt balesete, akkor a biztosítási díj évi 100 ezer Ft. Ha a partnernek az elmúlt két év mindegyikében volt balesete, akkor évi 200 ezer Ft-ot fizet. Amennyiben az ügyfélnek az elmúlt két év egyikében volt balesete, akkor a biztosítási díj 150 ezer Ft. Ha a partnernek balesete volt az elmúlt évben, akkor 10% a valószínűsége, hogy az aktuális évben is balesete lesz. Ha az ügyfélnek nem volt balesete az elmúlt évben, akkor csak 3% eséllyel lesz balesete az aktuális évben. Tegyük fel, hogy a fenti számok hosszú távon stabilnak tekinthetők. A biztosítónak mennyi az összes ügyfélre vonatkozó átlagos biztosítási díja? (2p)

SZ18.) Tekintsük a 30. feladat történetét. Milyen valószínűséggel lesz egy elsőéves hallgatóból harmadéves? (1p)

SZ19.) Legyenek X_n és Y_n független Markov láncok a $\{0; 1; 2\}$ állapottéren. Mindkét lánc átmenetmátrixa $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$. Tegyük fel, hogy $X_0 = 0$ és $Y_0 = 2$, valamint legyen $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$. Határozd meg T várható értékét! (3p)

34.) Olvassuk be a `kerdoiv.txt` fájlt, ami egy 2017-es hallgató kérdőíves felmérés adatait tartalmazza. A következőkre válaszoltak: nem, testmagasság (cm), súly (kg), cipőméret, hányast szerzett valszámból a 2017-es vizsgán, hány percet utazik az egyetemre, szorgalmi időszakban átlagosan hány órát tanul egy héten.

a.) Nézzük meg pontdiagrammal néhány adatpár közti összefüggést (pl. magasság és súly, nem és cipőméret, stb.)!

b.) A továbbiakban célunk a testmagasság modellezése/magyarázása a többi változó segítségével. Tekintsük az alábbi regressziós modelleket:

I.) Testmagasság = Testsúly + Hiba , ami a
Testmagasság = $a_0 + a_1 \cdot$ Testsúly + Hiba modell rövidített változata

II.) Testsúly = Testmagasság + Hiba

III.) Testmagasság = Testsúly + Lábméret + Hiba

IV.) Testmagasság = Nem + Hiba

Vizsgáljuk meg a korrelációs mátrixot! Keressük meg a legjobban illeszkedő modellt!

c.) Adjunk előrejelzést a legjobbnak tűnő modell(ek) alapján egy olyan fiú hallgató testmagasságára, aki 70 kg-os, 45-ös a cipőmérete, 5-öse volt valszámból, 25 percet utazik az egyetemre és heti 12 órát tanul!

d.) Szignifikáns hatással van a hallgatók neme a testmagasságukra?

e.) Szignifikáns hatással van a hallgatók tavalyi vizsgajegye a testmagasságukra?

35.) Egy ügyvédi vállalkozásnak két irodája van: egy Budapesten és egy Miskolcon. 2018-ban Budapesten 4-en dolgoztak, a bruttó fizetésük 500 e Ft, 600 e Ft, 550 e

Ft, 510 e Ft volt. A miskolci telephely dolgozói bruttó 450 e, 350 e, 400 e Ft-ot vittek haza.

a.) A telephely hány %-ban magyarázza a fizetések változékonyságát?

b.) A telephely szignifikáns hatással van a fizetésekre?

c.) Hogyan változik az előző két kérdésre adott válasz, ha Győrben is van egy telephely, az ott dolgozók fizetése pedig 450 e Ft és 550 e Ft?

36.) A távolsági autóbusz-közlekedés néhány jellemző adata egy év során:

Járat	Szállított utasok száma (M fő)	Utazási távolság átlaga	Utazási távolság szórása
Menetrend szerinti	450	17	5
Szerződéses	30	23	15
Külön	3	151	70
Összesen/együtt	...	...	...

a.) Számítsd ki a táblázat kipontozott celláit!

b.) A járat fajtája szignifikáns hatással van az utazási távolságra?

37.) A következő táblázat a 2016. 1. félévben tanár szakos BSc-s hallgatóknak tartott 4 valszám gyakorlat év végi, 100-ra skálázott végső pontszámait tartalmazza:

Gyakvezér	Pontszámok										
Cs. V.	98	87	102	92	52	46	95	60	81	55	60	94
	81	58	80	93	70	66	49	94	50	88	74	
W. G.	77	46	54	57	50	45	39	63	26	107	75	
	66	52	109	91	35	65						
B. Á.	86	94	54	61	42	59	88	81	81	80	102	72
	88	96	58	90	110	58	80	90	84	80	94	
V. L.	66	60	72	49	52	54	80	56	36	91	68	
	60	51	40	38	54	62						

Vizsgáljuk meg, az év végi pontszám függ-e attól, hogy a hallgató melyik csoportba jár! Hány %-ban magyarázza a pontszámok változékonyságát az, hogy a hallgatók melyik csoportba járnak?

B15.) [XII.10.] Egy söröző vezetője egy héten át feljegyezte a söröző forgalmát:

Nap	Vendégek száma (fő)	Átlagfogyasztás (korsó/fő)
Hétfő	38	2,9
Kedd	32	3,1
Szerda	25	2,6
Csütörtök	36	3
Péntek	48	3,3
Szombat	46	3,4
Vasárnap	43	3,1

Az egyes emberek fogyasztása átlagosan 12%-kal tér el az átlagos fogyasztástól ($\rightsquigarrow$ ez tekinthető a relatív szórásnak). Szignifikáns hatással van az átlagfogyasztásra az, hogy a hét melyik napjáról van szó?