Idősorelemzés gyakorlat

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Alkalmazott matematikus mesterszak
2016/2017 tavaszi félév

Játékszabályok

- A gyakorlatokról maximum 3-szor lehet hiányozni. Aki többször hiányzik, nem kap gyakjegyet.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - 35 pont: 1. ZH: III.30.
  - 35 pont: 2. ZH: V.18.
  - 30 pont: két, 15 pontos beadandó feladat
  - x pont: szorgalmi feladatok
- Mindkét ZH-n minimálisan teljesíteni kell 30 %-ot.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t kell írnod a teljes féléves anyagból (70 pontért, a beadandókért kapott pontok megmaradnak).
- A ZH-kon használható: **számológép** és egy legfeljebb A4-es méretű lapra KÉZZEL írott "puska".
- Osztályozás:

elégtelen (1)	0	–	34,99
elégséges (2)	35	–	49,99
közepes (3)	50	–	64,99
jó (4)	65	–	79,99
jeles (5)	80	–	1000

Infók a gyakvezetőről

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@cs.elte.hu`
Honlap	`vargal4.elte.hu`

Ajánlott irodalom

- Shumway-Stoffer: Time series analysis and its applications, with R examples Egy lebutított verziója ingyenesen letölthető: `http://www.stat.pitt.edu/stoffer/tsa4/tsaEZ.pdf`
- Brockwell-Davis: Introduction to time series and forecasting

---

Szimulációkhoz használt szoftver/programnyelv: **R**

- Statisztikai modellezésre, adatok elemzésére kiválóan alkalmas programnyelv
- Nyílt forráskódú, ma már alig van probléma, feladat, aminek a megoldására ne lenne valamilyen package – akár több is
- Jelenleg a legelterjedtebb matematikai célú programnyelv
- Letöltési helye: `https://cran.r-project.org/`
- Szövegszerkesztésre ajánlott szoftver: RStudio; letöltési helye: `https://www.rstudio.com/products/rstudio/download3/`

1.) Legyen X_t *véletlen bolyongás drift*-tel: $X_t = \delta + X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \ldots)$, ahol δ valós paraméter, $P(X_0 = 0) = 1$ és ε_t fehér zaj.

a.) Fejezzük ki X_t-t a fehér zaj folyamat segítségével!

b.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?

c.) Szimuláljunk egy ilyen folyamatot normális innovációk, $\delta = -1, 0, 1$, valamint $D\varepsilon_t = 1, 5, 10$ esetén, majd ábrázoljuk X_t-t, a trendet és az autokorreláció függvényét!

d.) Van-e olyan $\varphi(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ transzformáció, amivel származtatott folyamat már stacionárius?

e.) Tegyük fel, hogy a ε_t fehér zaj folyamat normális eloszlású. Határozd meg a δ paraméter és a fehér zaj σ^2 szórásnégyzet paraméterének ML-becslését az első n megfigyelés, mint n elemű minta alapján! Torzítatlan, illetve konzisztens a δ-ra adott becslés?

2.) Legyen $X_t = \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t+1} \quad (t = 1, 2, \ldots)$, ahol ε_t fehér zaj.

a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?

b.) Szimuláljunk egy fehér zajt, készítsük el hozzá X_t-t, majd ábrázoljuk a két idősort közös diagramban! Értelmezzük a látottakat!

3.) Legyen $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \ldots)$, ahol α, β valós paraméterek és ε_t fehér zaj.

a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?

b.) Van-e olyan $\varphi(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ transzformáció, amivel származtatott folyamat már stacionárius?

4.) Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{R}} = U \sin(2\pi\alpha t) + V \cos(2\pi\alpha t)$, ahol α valós paraméter, U és V egymástól független, 0 várható értékű és τ szórású val. változók.

a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?

b.) Legyen $Y_t = X_t + \varepsilon_t$, ahol ε_t fehér zaj. Szimuláljunk egy fehér zajt $D\varepsilon_t = 1, 2, 4, 8$ esetén, készítsük el hozzá Y_t-t, ha $\tau = 2$ és $\alpha = 1$, majd ábrázoljuk X_t és Y_t idősorokat! Értelmezzük a látottakat!

5.) Legyen $X_t = \sin(2\pi U t) \quad (t = 1, 2, \ldots)$, ahol $U \sim E(0; 1)$. Mutassuk meg, hogy X_t folyamat gyengén stacionárius, de erősen *nem* stacionárius!

Útmutatás az erős stacionaritás vizsgálatához: számoljuk ki a következő két valószínűséget: $P\left(X_1 < -\frac{\sqrt{3}}{2}, X_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $P\left(X_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}, X_3 < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$!

SZ1.) Legyen $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ stacionárius Gauss-folyamat (azaz minden $k \in \mathbb{Z}_+$-ra és $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$-re $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ együttesen normális eloszlású) és $Y_t = e^{X_t}$.

a.) Határozd meg az X_t folyamat momentumgeneráló függvényét, azaz $M_{X_t}(s) = E(e^{sX_t})$-t!

b.) Mutasd meg, hogy az Y_t folyamat gyengén stacionárius! (1+1= 2p)

SZ2.) Legyen $X_t = at + W_t$ ($t \geq 0$), ahol a ismeretlen valós paraméter, W_t Wiener-folyamat. Határozd meg az a paraméter ML-becslését egy azonos időközönként rendelkezésünkre álló n elemű minta alapján, azaz legyen $\delta > 0$ fix, $t_i - t_{i-1} = \delta$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $t_0 = 0$; a tapasztalati mintánk pedig $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}$ – azonos időközönként "nézünk rá" a folyamatra. (2p)
Útmutatás: Könnyen látható, hogy $X_{t_j} = X_{t_{j-1}} + a\delta + W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), ebből pedig már megállapítható az $X_{t_j}|X_{t_{j-1}}$ feltételes eloszlás.

Ebben a szakaszban a folyamatokat diszkrét egész időben értelmezzük, azaz $t \in \mathbb{Z}$.

6.) Legyenek X_t és Y_t egymással korrelálatlan stacionárius folyamatok R_X és R_Y autokovariancia függvénnyel, valamint F_X és F_Y spektrális eloszlásfüggvénnyel. Mutassuk meg, hogy ekkor a $Z_t = X_t + Y_t$ folyamat autokovariancia függvényére $R_Z(h) = R_X(h) + R_Y(h)$ és spektrális eloszlásfüggvényére $F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$ teljesül minden $h \in \mathbb{Z}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

7.) Határozzuk meg a következő folyamatok spektrális sűrűségfüggvényét, ha pedig nincsen, akkor a spektrális eloszlásfüggvényét:

a.) fehér zaj folyamat σ szórással;

b.) AR(1) folyamat: $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, ahol $|\alpha| < 1$ valós paraméter, ε_t fehér zaj σ szórással;

c.) MA(1) folyamat: $X_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1}$, ahol α valós paraméter, ε_t fehér zaj σ szórással;

d.) $X_t = U\sin(\alpha t) + V\cos(\alpha t)$, ahol α valós paraméter, U és V egymástól független, 0 várható értékű és τ szórású valószínűségi változók;

e.) $X_t = S_t + \alpha S_{t-D} + N_t$, ahol S_t és N_t stacionárius és egymástól független folyamatok 0 várható rétékkel és f_S, valamint f_N spektrális sűrűségfüggvényekkel; D ismert pozitív egész szám; α ismeretlen valós paraméter.

Szimuláljunk az egyes folyamatokból, ábrázoljuk az autokovariancia függvényt, valamint a spektrális sűrűségfüggvényt (eloszlásfüggvényt)!

8.) Legyen $X_t = U\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + V\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, ahol U és V egymástól független, 0 várható értékű és τ szórású valószínűségi változók; $Y_t = \varepsilon_t + 2,5\varepsilon_{t-1}$, ahol ε_t fehér zaj σ szórással; továbbá legyen $Z_t = X_t + Y_t$. Határozd meg a Z_t folyamat autokovariancia függvényét és a spektrális eloszlásfüggvényét!

9.) Döntsük el, hogy az alábbi egész számokon értelmezett függvények lehetnek-e egy stacionárius folyamat autokovariancia függvényei:

a.) $R(h) = I(h = 0)$;

b.) $R(h) = I(h = 0) - 0,5 \cdot I(|h| = 2) - 0,25 \cdot I(|h| = 3)$;

10.) Legyen egy stacionárius folyamat spektrális sűrűségfüggvénye $f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$. Határozd meg a folyamat autokovariancia és autokorreláció függvényét!
Útmutatás: integráljuk parciálisan az autokovariancia függvény deriváltját, majd oldjuk meg az így adódó $R'(h) = -hR(h)$ differenciálegyenletet!

SZ3.) Az egész számokon értelmezett $R(h) = I(h = 0) + cI(|h| = 1)$ függvény a c valós paraméter mely értékei esetén lehet egy stacionárius folyamat autokovariancia függvénye? (1p)

SZ4.) Legyenek X_t és Y_t stacionárius, egymástól független, 0 várható értékű folyamatok f_X és f_Y spektrális sűrűségfüggvényekkel, továbbá legyen $Z_t = X_t \cdot Y_t$. Mutasd meg, hogy a Z_t folyamat spektrális sűrűségfüggvénye a következőképp számolható: $f_Z(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda - y)f_Y(y)\,dy$. (2p)

SZ5.) Egy stacionárius X_t folyamat spektrális sűrűségfüggvénye a következő: $f(\lambda) = 100 \cdot I\left(-\frac{\pi}{6} - 0,01 < \lambda < -\frac{\pi}{6} + 0,01\right) + 100 \cdot I\left(\frac{\pi}{6} - 0,01 < \lambda < \frac{\pi}{6} + 0,01\right)$. Határozd meg a folyamat lag 1 (egylépéses késleltetésű) autokorrelációját, azaz az $r(1) = R(X_t, X_{t+1})$ mennyiséget! (2p)

11.) Tegyük fel, hogy ε_t független értékű zaj 0 várható értékkel és $\sigma_\varepsilon = 1$ szórással. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatoknak van stacionárius $MA(\infty)$ reprezentációjuk, továbbá, hogy invertálhatók (azaz létezik $AR(\infty)$ reprezentációjuk)!

a.) $X_t = 2 + 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t$

b.) $X_t = 0,2X_{t-1} + 0,35X_{t-2} + \varepsilon_t$

c.) $X_t = 0,5X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t$

d.) $X_t = X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t$

e.) $X_t = \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1}$

f.) $X_t = 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$.

g.) $X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1}$.

Határozzuk meg a következőket:

- a stacionárius megoldás várható értéke, szórása, autokorreláció-függvénye és parciális autokorreláció-függvénye;
- a folyamat $MA(\infty)$ reprezentációja;
- a folyamat spektrális sűrűségfüggvénye.

Szimuláljunk ilyen folyamatokat **R**-rel! Határozzuk meg **R** függvények segítségével is az autokorrelációkat, parciális autokorrelációkat és ábrázoljuk a spektrális sűrűségfüggvényt!

12.) Generáljunk egy zérus várható értékű, $\alpha_1 = 0,5$ és $\alpha_2 = 0,3$ paraméterű AR(2) folyamatból $n = 200$ elemű mintákat.

a.) Becsüljük vissza a minták paramétereit és vizsgáljuk meg, mennyire jó a becslés, illetve mennyire jó a modell!

b.) Játsszunk el azzal, hogy más modelleket illesztünk (például AR(1), AR(3), ARMA(1,1)), honnan vesszük észre, hogy ezek nem lesznek jók – ha egyáltalán észrevesszük.

c.) Vizsgáljuk meg szimulációval, hogy miként teljesít az AIC és a BIC információs kritérium a helyes rend kiválasztásában! Összehasonlításként nézzük meg az AIC/BIC értékeket, ha AR(1), AR(3), AR(4), ARMA(1,1) modelleket illesztünk a fenti AR(2)-ből generált mintákra! Mi történik, ha növeljük a mintaelemszámot?

13.) Elemezzük és illesszünk alkalmas ARMA modellt a 'gnp96.txt' fájlban található idősorra, ami az USA negyedéves reál (1996-os árakon számított) GNP adatait tartalmazza 1947 és 2002 között.

a.) Ábrázoljuk az idősort, és nézzük meg az ACF és PACF függvényét! Stacionáriusnak tűnik az idősor?

b.) Alkalmas transzformációval (logdifferenciák képzése) és/vagy regressziós modell illesztésével próbáljuk meg stacionáriussá tenni az idősort!

c.) A transzformált idősor ACF és PACF ábráinak szemrevételezése után próbáljunk meg alkalmas ARMA modellt illeszteni! AIC/BIC kritériumok alapján válasszuk ki a legjobbnak tűnő ARMA modellt, majd végezzünk modelldiagnosztikát (szignifikánsak-e a becsült paraméterek, a reziduálisok származhatnak-e fehér zaj folyamatból)!

14.) Az előző példához hasonlóan elemezzük és illesszünk alkalmas ARMA modellt az 'astsa' package-ben lévő 'gtemp' idősorra, ami 1880 és 2009 között a Föld átlaghőmérsékletét tartalmazza.

15.) [Lineáris modell] Keressük meg "kézzel" és **R** segítségével a legjobb (legkisebb négyzetes) becslést (a, b és c paraméterek)! Ábrázoljuk az adatpontokat és az illesztett görbét!

Adatok — Modell

a.)

x	-1	1	2
y	1	2	-1

$y = ax + b$

b.)

x	-1	0	1	2
y	8	8	4	16

$y = ax^2 + bx + c$

c.)

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	1	3	7

$y = a \cdot \cos(\pi x) + b \cdot \sin(\pi x)$

d.)

x	0	-1	1	1
y	1	0	-1	1

$a \cdot (x^2 + y^2) + b \cdot (x + y) = 1$

SZ6.) Legyen $X_t = 0,4X_{t-1} + 0,45X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2}$, ahol ε_t fehér zaj. Van stacionárius "megoldása" (MA reprezentációja) a folyamatnak? Ha van, akkor állítsd elő! (2p)

SZ7.) Mutasd meg, hogy az $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ MA(1) folyamat parciális autokorreláció függvénye $\rho_k = \frac{-(-\beta)^k}{1+\beta^2+\ldots+\beta^{2k}}$. (2p)

16.) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta egy stacionárius folyamatból.

a.) Torzítatlan becslése a folyamat várható értékének a $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ mintaátlag?

b.) Határozzuk meg a mintaátlag standard hibáját, azaz $D(\overline{X}_n)$-t!

c.) Legyen $\sum\limits_{h=-\infty}^{\infty} |R(h)| < \infty$. Hova tart $n \cdot D^2(\overline{X}_n)$, ha $n \to \infty$?

17.) Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stacionárius folyamat μ várható értékkel és $R(h)$ autokovariancia függvénnyel. Adjunk $0 < h \in \mathbb{Z}$ lépéses legkisebb négyzetes lineáris előrejelzést X_n segítségével, azaz határozzuk meg azon a és b értékeket, amikre az $MSE(a, b) := E([X_{n+h} - (a + bX_n)]^2)$ minimális! Határozzuk meg az így adódó $\hat{X}_{n+h} = \hat{a} + \hat{b}X_n$ becslés szórását!

18.) Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stacionárius folyamat μ várható értékkel és $R(h)$ autokovariancia függvénnyel. Célunk h lépéses legkisebb négyzetes lineáris előrejelzés meghatározása az első n megfigyelés, $X_n, \ldots, X_1$ segítségével. Jelölje a legjobb lineáris előrejelzést $\mathbb{P}_n X_{n+h} := a_0 + a_1 X_n + \ldots + a_n X_1$. Mutassuk meg, hogy

a.) a legjobb lineáris előrejelzés együtthatói kielégítik a következő egyenleteket:
$E(X_{n+h} - \mathbb{P}_n X_{n+h}) = 0$
$E\left[(X_{n+h} - \mathbb{P}_n X_{n+h})X_{n+1-j}\right] = 0 \quad j = 1, \ldots, n$

b.) a legjobb lineáris előrejelzés együtthatói kielégítik a következő egyenletrendszert: $\boxed{\Gamma_n \mathbf{a}_n = \mathbf{R}_n(h)}$, ahol

- $\Gamma_n = [R(i-j)]_{i,j=1}^n$
- $\mathbf{a}_n = (a_1, \ldots, a_n)^T$
- $\mathbf{R}_n(h) = (R(h), R(h+1), \ldots, R(h+n-1))^T$

c.) az előrejelzés $\mathbb{P}_n X_{n+h} = \mu + \sum\limits_{i=1}^n a_i(X_{n+1-i} - \mu)$ alakba írható, így a feladatok elején $\mu = 0$ feltehető, majd ezzel a képlettel megkapható az előrejelzés;

d.) az előrejelzés legkisebb négyzetes hibája $R(0) - \mathbf{a}_n^T \mathbf{R}_n(h)$.

19.) Az általános előrejelzési operátor és tulajdonságai.
Legyen $\mathbf{W} = (W_n, \ldots, W_1)^T$ véletlen vektor, Y valószínűségi változók, mindannyian véges szórással/szórásmátrixszal. Jelölje $\Gamma = cov(\mathbf{W}) = \Sigma(\mathbf{W})$ a kovarianciamátrixot. Célunk: $\mathbf{W}$ segítségével Y legkisebb négyzetes lineáris előrejelzésének előállítása.
Jelölje az előrejelzési operátort $\mathbb{P}(\,\bullet\,|\mathbf{W}) : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$, amit lineáris alakban keresünk: $\mathbb{P}(Y|\mathbf{W}) = a_0 + \mathbf{a}_n\mathbf{W}$, ahol a_0 és $\mathbf{a}_n = (a_1, \ldots, a_n)^T$ a becsülendő értékek.
Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ valós számok és Z véges szórású valószínűségi változó esetén

a.) $\mathbb{P}(Y|\mathbf{W}) = EY + \mathbf{a}_n(\mathbf{W} - EW)$, ahol $\Gamma\mathbf{a}_n = cov(Y, \mathbf{W})$;

b.) $E(Y - \mathbb{P}(Y|\mathbf{W}) = 0$
$E[(Y - \mathbb{P}(Y|\mathbf{W}))\mathbf{W}] = 0$;

c.) $MSE = E[(Y - \mathbb{P}(Y|\mathbf{W}))^2] = D^2Y - \mathbf{a}_n^T cov(Y, \mathbf{W})$;

d.) $\mathbb{P}(\alpha_1 Y + \alpha_2 Z + \beta|\mathbf{W}) = \alpha_1\mathbb{P}(Y|\mathbf{W}) + \alpha_2\mathbb{P}(Z|\mathbf{W}) + \beta$;

e.) $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i + \beta \middle| \mathbf{W}\right) = \sum_{i=1}^{n} W_i + \beta$;

f.) ha $cov(Y, \mathbf{W}) = \mathbf{0}$, akkor $\mathbb{P}(Y|\mathbf{W}) = EY$.

Megjegyzés (kapcsolat az előző feladatbeli operátorral): vegyük észre, hogy $\mathbb{P}_n(X_{n+h}) = \mathbb{P}(X_{n+h}|\mathbf{X}_n)$, ahol $\mathbf{X}_n = (X_n, \ldots, X_1)^T$.

20.) Legyen X_t stacionárius AR(1) folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal.

a.) Határozzuk meg a folyamat egylépéses, majd h lépéses legkisebb négyzetes előrejelzését és adjuk meg az előrejelzés hibáját! Vessük össze a kapottakat a 17.) feladat eredményével!

b.) Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat 1. és 3. megfigyelését, de a 2. megfigyelés hiányzik. Adjunk legkisebb négyzetes lineáris becslést X_2-re X_1 és X_3 segítségével, és határozzuk meg a becslés hibáját!

21.) Legyen X_t stacionárius MA(1) folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat 1. és 2. megfigyelését, de az 3. megfigyelés hiányzik. Adjunk legkisebb négyzetes lineáris becslést X_3-ra X_1 és X_2 segítségével, és határozzuk meg a becslés hibáját!

22.) Legyen X_t stacionárius AR(p) folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Határozzuk meg a folyamat egylépéses, legkisebb négyzetes előrejelzését!

23.) Legyen X_t stacionárius AR(1) folyamat μ várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Az előrejelzési operátorok tulajdonságait felhasználva, határozzuk meg a folyamat h lépéses, legkisebb négyzetes előrejelzését!

24.) A legjobbnak bizonyult ARMA modell alapján adjunk előrejelzést a 'gnp96.txt' fájlban található idősor következő 10 értékére! Adjunk intervallumbecslést is az előrejelzésre! Ábrázoljuk az idősort az előrejelzésekkel együtt!

25.) Legyen $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ MA(1) folyamat σ szórású innovációkkal. Generáljunk egy 100 elemű mintát, majd adjunk legkisebb négyzetes becslést a minta 12., 13. és 14. elemére a többi mintaelem segítségével (tekintsünk úgy rájuk, mintha ezek hibásak lennének, ezért becsülni kell őket)!

26.) Szabadítsuk meg az *astsa* package-ben lévő *jj* (Johnson&Jonhson) 1960 és 1980 közötti negyedéves adatsort a trendtől és a szezonális hatásoktól

a.) hagyományos idősor-dekompozícióval;

b.) az **R** nyelv *stl* parancsa (seasonal decomposition of time series by LOESS regression) segítségével.

Illesszünk alkalmas ARMA modellt a reziduálisokra, majd adjunk előrejelzést az 1981-es év mind a 4 negyedévére!

SZ8.) Legyen X_t AR(1) folyamat α paraméterrel és 1 szórású innovációval. Mutasd meg, hogy ekkor $D^2(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n^2(1-\alpha^2)} \frac{n - n\alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2}$. (1 pont)

SZ9.) Legyen X_t stacionárius MA(1) folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat 1., 2., 4. és 5. megfigyelését, de a 3. megfigyelés hiányzik. Adjunk legkisebb négyzetes lineáris becslést X_3-ra X_1, X_2, X_4 és X_5 segítségével, és határozzuk meg a becslés hibáját! (1 pont)

27.) Legyen X_t ($t = 1, 2, \ldots$) ARCH(1) folyamat, azaz $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, ahol $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$ és ε_t gauss-i fehér zaj.

a.) Határozd meg az $X_t|\mathcal{F}_{t-1}$ feltételes eloszlást, ahol $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$!

b.) Számold ki X_t várható értékét!

c.) Határozd meg a $\mathrm{cov}(X_{t+h}, X_t)$ mennyiséget, ha $h > 0$!

d.) Mutasd meg, hogy X_t^2 AR(1) folyamat!

e.) Határozzuk meg X_t szórásnégyzetét és 4. momentumát! Milyen paraméterértékek esetén léteznek ezek a mennyiségek?

f.) Stacionárius esetben számold ki a folyamat lapultságát, azaz a kurtosis=kurtosis$_t$ $= \frac{E(X_t - EX_t)^4}{D^4 X_t} - 3$ mennyiséget! Milyen a folyamat lapultsága a normális eloszláséhoz képest?

g.) Határozzuk meg a paraméterek momentum becslését!

h.) Határozzuk meg a paraméterek ML-becslését az X_1 kezdeti érték mellett!

Szimuláljunk ARCH(1) folyamatokat **R**-rel és az egyes feladatrészek eredményeit is vizsgáljuk meg!

28.) Illesszünk megfelelő GARCH modellt a(z)

a.) NYSE;

b.) GBP-CHF;

idősorra! Vizsgáljuk meg, mennyire jó a modell! Készítsünk 99%-os konfidencia intervallumot az idősor egy szakaszára!
