

Idősorelemzés gyakorlat
Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Alkalmazott matematikus mesterszak
2021/2022 tavaszi félév

Játékszabályok

- Legfeljebb 3 gyakorlatról lehet hiányozni. Ez fölött nem kapsz aláírást.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
 - 50 pont: számos, programozást is igénylő beadandó feladat, amiket a félév során hirdetek ki Canvas-ban
 - 50 pont: ZH: V.9. Canvas-ban
 - x pont: szorgalmi feladatok – **SZ** jelű példák, fix határidőig
- Tudnivalók a beadandókról
 - Összességében teljesíteni kell 40%-ot, azaz 20 pontot. Ha ezt nem éred el, nem kapsz aláírást.
 - A beadandóknál elvárás az önálló munkavégzés. Amennyiben nyilvánvaló másolás gyanúja merül fel, az érintettek 0 pontban részesülnek.
- Tudnivalók a ZH-ról
 - Minimálisan teljesíteni kell 30 %-ot, azaz a 15 pontot. Ha a ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. A jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Sikertelen pótZH esetén gyakUV-t kell írnod, a beadandókért kapott pontok megmaradnak.
 - A ZH-n használható: órai és egyéb jegyzetek, minden online elérhető anyag. Nem használható: hallgatótársaid, más emberek online segítsége.

elégtelen (1)	0	–	34,99
elégséges (2)	35	–	49,99
közepes (3)	50	–	64,99
jó (4)	65	–	79,99
jeles (5)	80	–	∞^3
- Osztályozás:

Infók a gyakorlatvezetőről

Név	Varga László, <i>óraadó</i>
Munkahely	Morgan Stanley, Model Risk Management
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
E-mail	vargala4@gmail.com
Honlap	vargal4.elte.hu

Ajánlott irodalom

- Shumway-Stoffer: Time series analysis and its applications, with R examples
Egy lebutított verziója ingyenesen letölthető innen
- Brockwell-Davis: Introduction to time series and forecasting

A félév során idősormodellezésre/szimulációkhoz használt programnyelv: **R**

- Statisztikai modellezésre, adatok elemzésére kiválóan alkalmas programnyelv
- Nyílt forráskódú, ma már alig van probléma, feladat, aminek a megoldására ne lenne valamilyen package – akár több is
- Jelenleg a legelterjedtebb matematikai célú programnyelv
- R nyelv/szoftver letöltési helye
- Szövegszerkesztésre ajánlott szoftver: RStudio; letöltési helye
- R Markdown: egyszerű szövegszerkesztő és kódot is futtató package, rövid bevezető: <https://rmarkdown.rstudio.com/lesson-1.html>

Amennyiben az adott feladat nem jelzi külön, t mindig az egész számok halmazát futja be, azaz $t \in \mathbb{Z}$.

- 1.) Legyen X_t véletlen bolyongás drift-tel: $X_t = \delta + X_{t-1} + \varepsilon_t$ ($t = 1, 2, \dots$), ahol δ valós paraméter, $P(X_0 = 0) = 1$ és $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.
 - a.) Fejezzük ki X_t -t a fehér zaj folyamat segítségével!
 - b.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?
 - c.) Szimuláljunk egy ilyen folyamatot normális innovációk, $\delta = -1, 0, 1$, valamint $\sigma = 1, 5, 10$ esetén, majd ábrázoljuk X_t -t, a trendet és az autokorreláció függvényét!
 - d.) Van-e olyan $\varphi(X_t, X_{t-1}, \dots)$ transzformáció, amivel származtatott folyamat már stacionárius?
 - e.) Tegyük fel, hogy a ε_t fehér zaj folyamat normális eloszlású. Határozd meg a δ paraméter és a fehér zaj σ^2 szórásnégyzet paraméterének ML-becslését az első n megfigyelés, mint n elemű minta alapján! Torzítatlan, illetve konzisztens a δ és σ paraméterekre adott becslés?
- 2.) Legyen $X_t = \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t+1}$ ($t = 1, 2, \dots$), ahol ε_t fehér zaj.
 - a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?
 - b.) Szimuláljunk egy fehér zajt, készítsük el hozzá X_t -t, majd ábrázoljuk a két idősort közös diagramban! Értelmezzük a látottakat!
- 3.) Legyen $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ ($t = 1, 2, \dots$), ahol α, β valós paraméterek és ε_t fehér zaj.
 - a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvényét! Gyengén stacionárius a folyamat?
 - b.) Van-e olyan $\varphi(X_t, X_{t-1}, \dots)$ transzformáció, amivel származtatott folyamat már stacionárius?
- 4.) Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{R}} = U \sin(2\pi\alpha t) + V \cos(2\pi\alpha t)$, ahol α valós paraméter, U és V egymástól független, 0 várható értékű és τ szórású val. változók.
 - a.) Határozzuk meg X_t várható érték, autokovariancia és autokorreláció függvé-

nyét! Gyengén stacionárius a folyamat?

b.) Legyen $Y_t = X_t + \varepsilon_t$, ahol ε_t fehér zaj. Szimuláljunk egy fehér zajt $D\varepsilon_t = 1, 2, 4, 8$ esetén, készítsük el hozzá Y_t -t, ha $\tau = 2$ és $\alpha = 1$, majd ábrázoljuk X_t és Y_t idősorokat! Értelmezzük a látottakat!

5.) Legyen $X_t = \sin(2\pi Ut)$ ($t = 1, 2, \dots$), ahol $U \sim E(0; 1)$. Mutassuk meg, hogy X_t folyamat gyengén stacionárius, de erősen nem stacionárius!

Útmutatás az erős stacionaritás vizsgálatához: számoljuk ki a következő két valószínűséget: $P\left(X_1 < -\frac{\sqrt{3}}{2}, X_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $P\left(X_2 < -\frac{\sqrt{3}}{2}, X_3 < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$!

SZ1.) [II.21.] Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ stacionárius Gauss-folyamat (azaz minden $k \in \mathbb{Z}_+$ -ra és $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ -re $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ együttesen normális eloszlású) és $Y_t = e^{X_t}$.

a.) Határozd meg az X_t folyamat momentumgeneráló függvényét, azaz $M_{X_t}(s) = E(e^{sX_t})$ -t!

b.) Mutasd meg, hogy az Y_t folyamat gyengén stacionárius! (1+1= 2p)

SZ2.) [II.21.] Legyen $X_t = at + W_t$ ($0 \leq t \in \mathbb{R}$), ahol a ismeretlen valós paraméter, W_t Wiener-folyamat. Határozd meg az a paraméter ML-becslését egy azonos időközönként rendelkezésünkre álló n elemű minta alapján, azaz legyen $\delta > 0$ fix, $t_i - t_{i-1} = \delta$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $t_0 = 0$; a tapasztalati mintánk pedig $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$ – azonos időközönként "nézünk rá" a folyamatra. (2p)

Útmutatás: Könnyen látható, hogy $X_{t_j} = X_{t_{j-1}} + a\delta + W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), ebből pedig már megállapítható az $X_{t_j} | X_{t_{j-1}}$ feltételes eloszlás.

6.) Tegyük fel, hogy ε_t független értékű zaj 0 várható értékkel és $\sigma_\varepsilon = 1$ szórással. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi folyamatok okozati folyamatok-e (azaz van stacionárius $MA(\infty)$ reprezentációjuk), továbbá, hogy invertálhatók-e (azaz létezik $AR(\infty)$ reprezentációjuk)!

- $X_t = 2 + 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0,2X_{t-1} + 0,35X_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0,5X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1}$
- $X_t = 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$.
- $X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1}$.

Határozzuk meg a következőket:

- a stacionárius megoldás várható értéke, szórása, autokorreláció-függvénye;
- a folyamat "inverze" ($MA(\infty)$ reprezentációja);
- a folyamat spektrális sűrűségfüggvénye.

Szimuláljunk ilyen folyamatokat \mathbf{R} -rel! Határozzuk meg \mathbf{R} függvények segítségével is az autokorrelációkat, parciális autokorrelációkat és ábrázoljuk a spektrális sűrűségfüggvényt!

7.) Generáljunk egy 1000 elemű mintát az $X_t = \omega + \alpha \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$ folyamatból, ahol $\omega = 2$, $\alpha = 0,6$ és $\varepsilon_t \sim IVN(0; 1)$. Becsüljük vissza az ω és α paramétereket

- az arima függvénnyel különböző 'method'-ok esetén (ML-becslés, legkisebb négyzetes becslés);
- az lm függvénnyel, azaz lineáris regresszióként tekintve a feladatra.

Hasonlítsuk össze a becsléseket és értelmezzük a kapottakat! Próbáljunk magyarázatot találni a kapott furcsaságra!

8.) Tekintsük a 6. feladat b.) részében definiált idősort. Generáljunk $n = 100, 500, 1000, 5000, 10000$ elemű mintákat, majd becsüljük vissza az ismeretlen paramétereket

- regressziós (lineáris) modell illesztésével;
- momentum módszerrel (Yule-Walker egyenletek segítségével);
- maximum likelihood módszerrel – tegyük fel, hogy a hibák normális eloszlást követnek.

Értelmezzük a látottakat és vessük össze az \mathbf{R} beépített paraméterbecslésével!

9.) Legyen $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$, ahol ε_t véges szórású i.i.d. zaj. Bizonyítsuk be, hogy a folyamatnak akkor és csak akkor van stacionárius megoldása, ha $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$ és $|\alpha_2| < 1$ teljesül!

10.) Generáljunk egy zérus várható értékű, $\alpha_1 = 0,5$ és $\alpha_2 = 0,3$ paraméterű $AR(2)$ folyamatból $n = 200$ elemű mintákat.

- Becsüljük vissza a minták paramétereit, majd végezzünk modelldiagnosztikát – vizsgáljuk meg, mennyire jó a becslés, illetve mennyire jó a modell!
- Játsszunk el azzal, hogy más modelleket illesztünk (például $AR(1)$, $AR(3)$, $ARMA(1,1)$), honnan vesszük észre, hogy ezek nem lesznek jók – ha egyáltalán észrevesszük.
- Vizsgáljuk meg szimulációval, hogy miként teljesít az AIC és a BIC információs kritérium a helyes rend kiválasztásában! Összehasonlításként nézzük meg az AIC/BIC értékeket, ha $AR(1)$, $AR(3)$, $AR(4)$, $ARMA(1,1)$ modelleket illesztünk a fenti $AR(2)$ -ből generált mintákra! Mi történik, ha növeljük a minta elemszámot?

11.) Elemezzük és illesszünk alkalmas $ARMA$ modellt a 'gnp96.txt' fájlban található idősorra, ami az USA negyedéves, szezonális hatásoktól megszabadított reál (1996-os áron számított) GNP adatait tartalmazza 1947 és 2002 között.

- Ábrázoljuk az idősort, és nézzük meg az ACF és PACF függvényét! Stacionáriusnak tűnik az idősor?
- Alkalmas transzformációval (logdifferenciák képzése) és/vagy regressziós modell illesztésével próbáljuk meg stacionáriussá tenni az idősort!
- A transzformált idősor ACF és PACF ábráinak szemrevételezése után próbáljunk meg alkalmas $ARMA$ modellt illeszteni! AIC/BIC kritériumok alapján válasszuk ki a legjobbnak tűnő $ARMA$ modellt, majd végezzünk modelldiagnosztikát (szignifikánsak-e a becsült paraméterek, a reziduálisok származhatnak-e fehér zaj folyamatból)!

12.) Az előző példához hasonlóan elemezzük és illesszünk alkalmas $ARMA$ modellt az 'astsa' package-ben lévő 'gtemp' idősorra, ami 1880 és 2009 között a Föld átlag-

hőmérsékletét tartalmazza.

- 13.)** Vizsgáljuk meg a különbség-előjel próbát! Legyen X_1, \dots, X_n minta egy stacionárius folyamatból, és legyen Z_n annak a száma, ahányszor a folyamat értéke növekszik, azaz $Z_n = \sum_{i=2}^n Y_i$, ahol $Y_i = I(X_i > X_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, n$.
- a.) Az összefüggő valószínűségi változó sorozatokra vonatkozó centrális határeloszlás-tétel segítségével mutassuk meg, hogy $\frac{Z_n - \frac{n-1}{2}}{\sqrt{\frac{n-1}{12}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0; 1)$!
- b.) Generálj i.i.d. sorozatot $n = 10, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000$ mintanagyságok esetén, majd szimulációk alapján becsüld meg az elsőfajú hiba valószínűségét!
- c.) Generálj
- AR(1) folyamatból;
 - driftes véletlen bolyongásból
- mintákat $n = 10, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000$ mintanagyságok esetén, majd szimulációk alapján becsüld meg a különbség-előjel próba erejét!
- 14.)** Legyen X_t BL(1,0,1,1) folyamat, azaz $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t + cX_{t-1}\varepsilon_{t-1}$, ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$.
- a.) Mutasd meg, hogy amennyiben stacionárius a folyamat, akkor
- $M_1 = EX_t = \frac{c\sigma^2}{1-a}$
 - $M_2 = EX_t^2 = \frac{2c^2\sigma^4 + \sigma^2 + 4ac\sigma^4 \frac{c}{1-a}}{1-a^2 - c^2\sigma^2}$
 - $R(1) = cov(X_t, X_{t-1}) = a \cdot \left[\frac{2c^2\sigma^4 + \sigma^2 + 4ac\sigma^4 \frac{c}{1-a}}{1-a^2 - c^2\sigma^2} - \frac{c^2\sigma^4}{(1-a)^2} \right] + \frac{c^2\sigma^4}{1-a}$
 - $R(k) = cov(X_t, X_{t-k}) = a^{k-1} \cdot R(1)$ $k = 2, 3, \dots$
- b.) Szimulálj a folyamatból a paraméterek különböző értékei esetén! Vizsgáld meg a tapasztalati korreláció és autokorreláció függvényeket! Becsüld vissza az a és c együttthatókat momentum és ML-módszerrel!
- 15.)** Legyen X_t ARCH(1) folyamat, azaz $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, ahol $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$ és ε_t gauss-i fehér zaj.
- a.) Határozd meg az $X_t | \mathcal{F}_{t-1}$ feltételes eloszlást, ahol $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$! Ez alapján határozd meg az EX_t értéket!
- b.) Határozd meg a $cov(X_{t+h}, X_t)$ mennyiséget, ha $h > 0$!
- c.) Mutasd meg, hogy X_t^2 AR(1) folyamat!
- d.) Mutasd meg, hogy $D^2 X_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ és $EX_t^4 = \frac{3\alpha_0^2(1-\alpha_1^2)}{(1-\alpha_1)^2(1-3\alpha_1^2)}$! Milyen paraméterértékek esetén léteznek ezek a mennyiségek?
- e.) Határozzuk meg a paraméterek momentum becslését!
- f.) Határozzuk meg a paraméterek ML-becslését!
- Szimuláljunk ARCH(1) folyamatokat \mathbf{R} -rel és az egyes feladatrészek eredményeit is vizsgáljuk meg! Becsüljük vissza a paramétereket!
- 16.)** Szimuláljunk 1000 elemű mintát GARCH(1,1) folyamatból, ha a paraméterek $\alpha_0 = 0,01$, $\alpha_1 = 0,2$, $\beta = 0,75$, az innovációk pedig standard normális eloszlásúak. Illesszünk ARMA(1,1), ARCH(1) és GARCH(1,1) modelleket a mintára, majd értékeljük a kapott eredményeket!

17.) Illesszünk megfelelő GARCH modellt a(z)

- a.) NYSE;
b.) GBP-CHF;
idősorra! Vizsgáljuk meg, mennyire jó a modell!

18.) A Ljapunov-exponens segítségével állapítsd meg, hogy az alábbi folyamatok mely paraméterértékek esetén erősen stacionáriusak!

- a.) $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, ahol $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
b.) $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, ahol $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$, ε_t független értékű $N(0, 1)$ eloszlású zaj
c.) $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, ahol $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$, ε_t független értékű $E(0, 1)$ eloszlású zaj

SZ3.) [III.14.] Legyen $X_t = 0,4X_{t-1} + 0,45X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2}$, ahol ε_t fehér zaj. Van stacionárius "megoldása" (MA reprezentációja) a folyamatnak? Ha van, akkor állítsd elő! (2p)

SZ4.) [III.14.] Mutasd meg, hogy az $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ MA(1) folyamat parciális autokorreláció függvénye $\rho_k = \frac{-(-\beta)^k}{1+\beta^2+\dots+\beta^{2k}}$. (2p)

SZ5.) [III.28.] Legyen X_1, \dots, X_n fehér zajból származó minta. Mutasd meg, hogy

- a.) a Bartlett-tételben (lásd elméleti összefoglaló) szereplő \mathbf{W} mátrix egységmátrix!
b.) Készíts konfidenciaintervallumot a $\hat{r}(h)$, $h \in \mathbb{Z}$ empirikus autokorrelációra! (1+1=2p)

SZ6.) [III.28.] Bizonyítsd be, hogy a fordulópont próba (turning point test) próbastatisztikája eloszlásban a standard normális eloszlásoz tart, amennyiben a minta i.i.d. fehér zajból származik, azaz teljesül a nullhipotézis! (2p)

19.) Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ stacionárius folyamat μ várható értékkel és $R(h)$ autokovariancia függvényvel. Adjunk $0 < h \in \mathbb{Z}$ lépéses legkisebb négyzetes lineáris előrejelzést X_n segítségével, azaz határozzuk meg azon a és b értékeket, amikre az $MSE(a, b) := E([X_{n+h} - (a + bX_n)]^2)$ minimális! Határozzuk meg az így adódó $\hat{X}_{n+h} = \hat{a} + \hat{b}X_n$ becslés szórását!

20.) Legyen X_t stacionárius AR(1) folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal.

- a.) Határozzuk meg a folyamat egy lépéses, majd h lépéses legkisebb négyzetes előrejelzését és adjuk meg az előrejelzés hibáját! Vessük össze a kapottakat a 19.) feladat eredményével!
b.) Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat 1. és 3. megfigyelését, de a 2. megfigyelés hiányzik. Adjunk legkisebb négyzetes lineáris becslést X_2 -re X_1 és X_3 segítségével, és határozzuk meg a becslés hibáját!

21.) Legyen X_t stacionárius MA(1) folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat 1. és 2. megfigyelését, de az 3. megfigyelés hiányzik. Adjunk legkisebb négyzetes lineáris becslést X_3 -ra X_1 és X_2

segítségével, és határozzuk meg a becslés hibáját!

22.) Legyen X_t stacionárius $AR(p)$ folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Határozzuk meg a folyamat egy lépéses, legkisebb négyzetes előrejelzését!

23.) Legyen X_t stacionárius $AR(1)$ folyamat μ várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Az előrejelzési operátorok tulajdonságait felhasználva, határozzuk meg a folyamat h lépéses, legkisebb négyzetes előrejelzését!

24.) Határozzuk meg a legkisebb négyzetes legjobb előrejelzést a 'gnp96.txt' fájlban található idősor következő 10 értékére a legjobbnak bizonyult ARMA modell alapján a beépített `predict` függvény segítségével! Adjunk intervallumbecslést is az előrejelzésre! Ábrázoljuk az idősort az előrejelzésekkel együtt!

SZ7.) [IV.18.] Legyen X_t $AR(1)$ folyamat α paraméterrel és 1 szórású innovációval. Mutasd meg, hogy ekkor $D^2(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n^2(1-\alpha^2)} \frac{n-n\alpha^2-2\alpha+2\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2}$. (1 pont)

SZ8.) [IV.18.] Legyen X_t stacionárius $MA(1)$ folyamat 0 várható értékkel és σ szórású innovációkkal. Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat 1., 2., 4. és 5. megfigyelését, de a 3. megfigyelés hiányzik. Adjunk legkisebb négyzetes lineáris becslést X_3 -ra X_1, X_2, X_4 és X_5 segítségével, és határozzuk meg a becslés hibáját! (1 pont)

25.) Tekintsük az $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ ($t = 1, 2, \dots$) folyamatot, ahol α, β valós paraméterek és ε_t fehér zaj. Milyen típusú ARIMA folyamat ez?

26.) Tekintsük az $X_t = \omega + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ $AR(1)$ folyamatot, ahol $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Milyen folyamatot kapunk, ha 1-szer, 2-szer, stb. differenciáljuk?

27.) Tekintsük az alábbi $ARIMA(1,1,0)$ modellt: $(1 - \phi B)(1 - B)X_t = \varepsilon_t$, ahol $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $|\phi| < 1$, $DX_0 < \infty$, $t = 1, 2, \dots$

- Oldjuk meg az ARIMA-egyenletet, azaz fejezzük ki az X_t -t a zaj segítségével!
- Szimuláljunk ilyen folyamatból és nézzük meg az autokorreláció függvényt! Becsüljük vissza a paramétereket! Teszteljük a modellt egységgyök tesztel!

28.) Az általános lineáris modell paraméterének legkisebb négyzetes becslését felhasználva mutasd meg, hogy az $y_i = ax_i + b$, $i = 1, 2, \dots, n$ egyváltozós lineáris regressziós modell esetén az együtthatók legkisebb négyzetes becslése

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - n \cdot \bar{x}^2} \quad \text{és} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \bar{x}.$$

29.) Egy fagyaltárus negyedéves forgalmának alakulása (ezer gombóc):

Év	I. negyedév	II. negyedév	III. negyedév	IV. negyedév
2017	95	152	255	118
2018	102	146	248	124
2019	97	156	245	122

Jelölje az idősor elemeit $(x_t)_{t=1,2,\dots,12}$. Néhány számítási eredmény:

$$\sum_{t=1}^{12} x_t = 1860 \quad \sum_{t=1}^{12} t \cdot x_t = 12342 \quad \sum_{t=1}^{12} t = 78 \quad \sum_{t=1}^{12} t^2 = 650$$

a.) Határozd meg a lineáris trend egyenletét és értelmezd a paramétereket!

b.) Határozd meg a szezonális eltéréseket és értelmezd őket!

c.) Adj pont- és intervallumbecslést a 2020. évi eladási mennyiségekre (mind a 4 negyedévre)!

30.) Szabadítsuk meg az *astsa* package-ben lévő *jj* (Johnson&Jonhson) 1960 és 1980 közötti negyedéves adatsort a trendtől és a szezonális hatásoktól

a.) szezonindexek számolásával;

b.) az **R** nyelv *stl* paranca (seasonal decomposition of time series by LOESS regression) segítségével;

c.) alkalmas differenciák képzésével;

d.) SARIMA modell illesztésével.

Illesszünk alkalmas ARMA modellt a reziduálisokra, majd adjunk előrejelzést az 1981-es év mind a 4 negyedévére!

31.) Legyen Y_t stacionárius folyamat 0 várható értékkel és legyenek a és b valós konstansok. Ha $X_t = a + bt + s_t + Y_t$, ahol s_t szezonális komponens 4 periódussal, akkor mutassuk meg, hogy $\nabla \nabla_4 X_t = (1 - B)(1 - B^4)X_t$ folyamat stacionárius, és fejezzük ki az autokovariancia függvényét Y_t folyamat $R_Y(h)$ autokovariancia függvényével!

SZ9.) [V.2.] Tekintsük a 27. feladatban szereplő ARIMA modellt. Számold ki az autokorreláció függvényt! (2p)

32.) Legyenek X_t és Y_t egymással korrelálatlan stacionárius folyamatok R_X és R_Y autokovariancia függvényvel, valamint F_X és F_Y spektrális eloszlásfüggvényvel. Mutassuk meg, hogy ekkor a $Z_t = X_t + Y_t$ folyamat autokovariancia függvényére $R_Z(h) = R_X(h) + R_Y(h)$ és spektrális eloszlásfüggvényére $F_Z(x) = F_X(x) + F_Y(x)$ teljesül minden $h \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén.

33.) Határozzuk meg a következő folyamatok spektrális sűrűségfüggvényét, ha pedig nincsen, akkor a spektrális eloszlásfüggvényét:

a.) fehér zaj folyamat σ szórással;

b.) $AR(1)$ folyamat: $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, ahol $1 > |\alpha| \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$;

c.) $MA(1)$ folyamat: $X_t = \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$;

d.) $X_t = U \sin(\alpha t) + V \cos(\alpha t)$, ahol α valós paraméter, U és V egymástól független, 0 várható értékű és τ szórású valószínűségi változók;

e.) $X_t = S_t + \alpha S_{t-D} + N_t$, ahol S_t és N_t stacionárius és egymástól független folyamatok 0 várható értékkel és f_S , valamint f_N spektrális sűrűségfüggvényekkel; D ismert pozitív egész szám; α ismeretlen valós paraméter.

Szimuláljunk az egyes folyamatokból különböző paraméterértékek esetén, ábrázoljuk a mintát, az autokorreláció függvényt, valamint a spektrális sűrűségfüggvényt (eloszlásfüggvényt)!

34.) Legyen $X_t = U \sin(\frac{\pi}{3}t) + V \cos(\frac{\pi}{3}t)$, ahol U és V egymástól független, 0

várható értékű és τ szórású valószínűségi változók; $Y_t = \varepsilon_t + 2,5\varepsilon_{t-1}$, ahol ε_t fehér zaj σ szórással; továbbá legyen $Z_t = X_t + Y_t$. Határozd meg a Z_t folyamat autokovariancia függvényét és a spektrális eloszlásfüggvényét!

35.) Döntsük el, hogy az alábbi egész számokon értelmezett függvények lehetnek-e egy stacionárius folyamat autokovariancia függvényei:

a.) $R(h) = I(h = 0)$;

b.) $R(h) = I(h = 0) - 0,5 \cdot I(|h| = 2) - 0,25 \cdot I(|h| = 3)$;

36.) Legyen egy stacionárius folyamat spektrális sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [-\pi; \pi]$. Határozd meg a folyamat autokovariancia és autokorreláció függvényét!

Útmutatás: integráljuk parciálisan az autokovariancia függvény deriváltját, majd oldjuk meg az így adódó $R'(h) = -hR(h)$ differenciálegyenletet!

37.) Egy ARMA folyamat spektrális sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \frac{2+2\cos x}{\pi(1,5625-2,5\cos x+\cos^2 x)}$. Határozd meg a folyamat rendjét és paramétereit!

SZ10.) [V.9.] Az egész számokon értelmezett $R(h) = I(h = 0) + cI(|h| = 1)$ függvény a c valós paraméter mely értékei esetén lehet egy stacionárius folyamat autokovariancia függvénye? (1p)

SZ11.) [V.9.] Legyenek X_t és Y_t stacionárius, egymástól független, 0 várható értékű folyamatok f_X és f_Y spektrális sűrűségfüggvényekkel, továbbá legyen $Z_t = X_t \cdot Y_t$. Mutasd meg, hogy a Z_t folyamat spektrális sűrűségfüggvénye a következőképp számolható: $f_Z(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(x-y)f_Y(y) dy$. (2p)

SZ12.) [V.9.] Egy stacionárius X_t folyamat spektrális sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = 100 \cdot I(-\frac{\pi}{6} - 0,01 < x < -\frac{\pi}{6} + 0,01) + 100 \cdot I(\frac{\pi}{6} - 0,01 < x < \frac{\pi}{6} + 0,01)$. Határozd meg a folyamat lag 1 (egylépéses késleltetésű) autokorrelációját, azaz az $r(1) = \text{cor}(X_t, X_{t+1})$ mennyiséget! (2p)