Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

Programtervező informatikus szak, esti képzés

Játékszabályok

- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - · 50 pont: 1. ZH a félév közepén
  - · 50 pont: 2. ZH a félév végén
  - · x pont: szorgalmi feladatokkal
- Mindkét ZH-n minimálisan teljesíteni kell a 30 %-ot, azaz a 15 pontot.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t írsz, és maximum kettest kaphatsz.
- A ZH-kon a kiosztott táblázatokon kívül használni lehet egy A4-es lapra (akár mindkét oldalára) KÉZZEL írott "puskát".
- Osztályozás:

1	0	-	34,99
2	35	-	49,99
3	50	-	64,99
4	65	-	79,99
5	80	-	1000

Infók a gyakvezetőről

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@chello.hu`
Honlap	`www.cs.elte.hu/~vargal4`

Ajánlott irodalom

- Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok (a valószínűségszámítás részhez)
- Móri-Szeidl-Zempléni: Matematikai statisztika példatár (a statisztika részhez)

1.) Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer.
a.) Mik lesznek a kísérletet leíró eseménytér pontjai?
b.) Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen 1 fejet dobunk?

2.) Egy arany és egy ezüst érmével dobunk, majd újra dobunk azzal/azokkal az érmével/érmékkel, amelyikkel/amelyekkel fejet kaptunk. Írjuk fel az eseményteret! Határozd meg az elemi események valószínűségét!

3.) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

4.) Aritmethiában az autók rendszámai hatjegyű számok 000000 és 999999 között. Mi a valószínűsége, hogy van 6 a jegyek között?

5.) Lottóhúzás során (5-ös lottó)
a.) milyen eséllyel lesz telitalálatom?
b.) milyen eséllyel lesz két találatom?
c.) milyen eséllyel lesz legalább két találatom?

6.) Ha egy magyarkártya-csomagból visszatevéssel húzunk 3 lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy
a.) pontosan
b.) legalább egy piros színű lapot húzunk?

SZ1.) Mutasd meg, hogy amennyiben $A_1, ..., A_n$ tetszőleges események, akkor $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$. (1 pont)

SZ2.) Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha
a.) egyformák
b.) különbözőek a párok? (1 pont)

7.) Egy 32 tagú osztályban a diákok angolt, németet vagy franciát tanulhatnak. Tudjuk, hogy angolul 20-an tanulnak, németül 12-en, franciául pedig 9-en. Angolul és németül egyszerre 5-en, németül és franciául egyszerre 3-an, angolul és franciául 2-en, és senki nem tanulja mind a három nyelvet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott tanuló legalább az egyik idegen nyelvet tanulja?

8.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

9.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

10.) 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

11.) Osztozkodási probléma: hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 2:1 állásnál félbeszakadt a 4 győzelemig tartó mérkőzésük? (Tfh. az egyes játékok egymástól függetlenek, bármelyikük 1/2 valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál.)

SZ3.) A 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul? (1 pont)

SZ4.) A gólyabálon 400 hallgató vesz részt. Megérkezéskor mindenki leadja a kabátját a ruhatárba: kapnak egy cédulát, ami egy számot tartalmaz. A ruhatáros néninek pedig a cédulának megfelelő fogas helyére kellene vinni a ruhát. Egy bökkenő van: a néni nem tud olvasni, ezért véletlenszerűen felakasztgatja a kabátokat (a hallgatóknak ez nem tűnik fel). A bál végén mindenki odamegy a ruhatárhoz a ruhájáért. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy senki se a saját kabátját kapja! (2 pont)

SZ5.) Cilike és Dani pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/4 valószínűséggel Cilike, 3/4 valószínűséggel Dani nyer meg. A jelenlegi állás 19:18 Cilike javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Dani nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 21 pontot szerezni.) (2 pont)

12.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

13.) Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy egy lottóhúzásnál (90/5) a legnagyobb kihúzott szám k. Számítsd ki a p_k értékeket, és mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

14.) Legyenek A, B, C, D, egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra érünk vissza először A-ba. Írjuk fel X eloszlását! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

15.) Egy tétova hangya a számegyenesen bolyong. 0-ból indul és minden lépésnél egyforma valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lép. Mennyi a valószínűsége, hogy 2n lépés után a hangya k-ban lesz?

SZ6.) Legyenek az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáró események, melyek a $\mathrm{P}(A_1)=p_1$, $\mathrm{P}(A_2)=p_2$ és $\mathrm{P}(A_3)=p_3$ valószínűségekkel következnek be. Mennyi a valószínűsége, hogy n független kísérletet végezve, a kísérletek során az A_2 előbb következik be, mint az A_1 vagy az A_3? Számítsuk ki e valószínűség határértékékét, ha a kísérletek száma a végtelenhez tart! (2 pont)

SZ7.) Hányszor kell két kockát feldobnunk, hogy 0,99-nél nagyobb valószínűséggel legalább egyszer két hatost dobjunk? (1 pont)

16.) Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 100 000Ft-os, és 100 db 1 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

17.) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét.

18.) Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

19.) Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy egy évben legfeljebb egy ember lesz így öngyilkos?

20.) Egy 200 oldalas könyvben 20 sajtóliba található véletlenszerűen elszórva.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 100. oldalon több, mint egy ajtóhiba van?

b.) Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 100. oldalon?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két hajtóhiba van?

21.) 5-ször dobunk egy szabályos kockával. Legyen X a 6-osok száma. $\mathrm{D}^2(\mathrm{X})=$?

SZ8.) Egy szabálytalan érmét addig dobálunk, amíg fejet nem kapunk. Annak a valószínűsége, hogy páros sokszor kell dobnunk, harmad akkora, mint annak, hogy páratlan sokszor. Mekkora a fejdobás valószínűsége? (2 pont)

SZ9.) Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó, amiről ismertek:

EX=8, DX=2. Határozd meg a P(X<16) valószínűséget! (1 pont)

22.) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$Y \backslash X$	1	2	3	Y peremeloszlása
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	
X peremeloszlása				

a.) Határozd meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét!
b.) X és Y függetlenek egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!
c.) $P(X < 3|Y < 7) =?$
d.) $E(Y|X = 2) =?$

23.) Legyen X és Y független, azonos eloszlású. Tegyük fel azt is, hogy véges szórásúak. $R(X, aX + bY) =?$

SZ10.) Egy tányéron 8 diós és 4 mákos sütemény van. A diósak közül kettőnek, a mákosak közül háromnak égett az alja. Addig húzunk a tányérról visszatevés nélkül, amíg diósat vagy égett aljút nem húzunk.
a.) Legyen X a kihúzott égett aljú sütemények száma, Y pedig a kihúzott mákos sütemények száma. Add meg X és Y együttes eloszlását és a peremeloszlásokat (foglald táblázatba)!
b.) $R(X, Y) =?$ (2+1 pont)

SZ11.) Legyen (X, Y) diszkrét valószínűségi vektorváltozó, mely 3 értéket vesz fel azonos valószínűséggel: $(-1; 0,5), (0; 1), (1; 1,5)$.
R(X, Y)=? Meglepő-e az eredmény és miért? (1 pont)

24.) Írd fel és ábrázold az eloszlásfüggvényt, ha X
a.) indikátorváltozó $p = 1/2$ paraméterrel;
b.) egy olyan kockadobás eredménye, ahol a kockán egy 2-es, két 4-es és három 5-ös van.

25.) Mely c-re lesz eloszlásfüggvény $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ cx^3 & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$
$P(-1 < X < 1) =?$ Határozd meg a sűrűségfüggvényét!

26.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő:
$$f(x) = \begin{cases} cx^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
a.) Határozd meg a c értékét és X eloszlásfüggvényét!
b.) $P(X < -0.5) =?$ $P(X < 0.5) =?$ $P(X < 1.5) =?$
c.) $D^2(X) =?$

27.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
a.) $c =?$, $F(x) =?$
b.) $P(X < 2) =?$, $P(X > 3) =?$
c.) $E(X) =?$
d.) $D^2(X) =?$

28.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } 2 < x < c \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
a.) $c =?$ $F(x) =?$
b.) $E(X) =?$ $D(X) =?$

29.) Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

30.) Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

SZ12.) Az A és B állandók mely értékére lehet az
$F(x) = A + B\text{arctgx}(-\infty < x < \infty)$ eloszlásfüggvény? (1 pont)

SZ13.) Egy egyszerű csapadék-modell lehet a következő: annak az esélye, hogy egy adott napon nem lesz csapadék, 0.6. Ha van csapadék, akkor a mennyisége exponenciális eloszlású, $\lambda = 2$ paraméterrel. Adjuk meg a csapadékmennyiség eloszlásfüggvényét. Mi a valószínűsége, hogy legalább 1 mm csapadék lesz? Abszolút folytonos-e az eloszlás? (2 pont)

31.) U és V valószínűségi változókról a következőket tudjuk: $R(U, V) = -0,75$; $EU = 4$; $EV = 6$; $D(U) = D(V) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Becsüld alulról a $P(8 <$

$U+V<12$) valószínűséget!

32.) Hamis érmével dobunk, a fej valószínűsége 0,51.

a.) Becsüljük meg a Csebisev-egyenlőtlenséggel, majd a centrális határértéktétel segítségével is annak a valószínűségét, hogy 10 ezer dobásból legalább 5050 fej!

b.) Hányszor kell dobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 97,5 %-os valószínűséggel több legyen, mint 0,505?

33.)

a.) Legyenek $X_i \sim$Ind(p) $(i=1,2,\ldots)$ val. változók. Mihez konvergál $\frac{X_1^5+\ldots+X_n^5}{n}$?

b.) X_i jelölje az i-edik kockadobás eredményét. Mihez konvergál $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$?

34.) Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

SZ14.) Legyenek $X_i \sim E(0,1)$, $i=1,\ldots,n$ független val. változók, és jelölje Y_n a maximumukat. Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim_{n\to\infty} P\left(n(1-Y_n)>t\right)$ (1 pont)

SZ15.) Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{n^k}{k!}$ (2 pont)

35.) Legyen $X \sim$Exp(λ). Határozd meg X móduszát és tetszőleges kvantilisét! Hasonlítsd össze a mediánt és a várható értéket!

36.) Legyen $X \sim$Ind(p). Határozd meg X móduszát és kvantilisfüggvényét!

37.) Legyen $X_1,\ldots,X_{20}$ i.i.d. minta $N(m,1^2)$ eloszlásból. Célunk az ismeretlen m paraméter becslése. Tekintsük az alábbi három statisztikát:

- $T_1(\mathbf{X})=X_8$,
- $T_2(\mathbf{X})=\frac{X_3+X_7}{2}$,
- $T_3(\mathbf{X})=\frac{X_9+X_{19}}{8}$.

a.) A fenti statisztikák közül melyek torzítatlanok? Amelyik nem torzítatlan, hogyan tudnánk torzítatlanná tenni?

b.) Vizsgáljuk meg a fenti statisztikák közül a torzítatlanokat hatásosság szempontjából!

38.) n elemű λ-paraméterű exponenciális minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-3\lambda}$-ra és $\frac{1}{\lambda}$-ra!

39.) Adjunk meg torzítatlan becslést a $[0,\theta]$ intervallumon egyenletes eloszlás paraméterére

a.) a mintaátlag

b.) a maximum

segítségével. Hasonlítsuk őket össze hatásosság szempontjából! Melyik becslés konzisztens?

40.) Mutassuk meg, hogy exponenciális eloszlású minta esetén $T(\mathbf{X})=n\cdot\min(X_1,\ldots,X_n)$ statisztika torzítatlan, de nem konzisztens becslése a várható értéknek.

SZ16.) Piroska kigondolt valahány számot, a farkas pedig kiszámította a tapasztalati szórásnégyzetüket: 15,84 ; valamint a korrigált tapasztalati szórásnégyzetüket: 19,8 . Hány számra gondolt Piroska? (1 pont)

SZ17.) Adjunk torzítatlan becslést a $[0,\theta]$ intervallumon egyenletes eloszlás paraméterére a minimum segítségével. Számoljuk ki a becslés szórását is. (2 pont)

SZ18.) Legyen $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. minta Bin(k,p)-ből, $Y_1,\ldots,Y_n$ i.i.d. minta Bin(l,p)-ből, és tegyük fel, hogy a két minta egymástól is független. Milyen (a,b) számpárokra lesz $a\overline{X}+b\overline{Y}$ a p paraméter torzítatlan becslése? Ezen számpárok közül melyikre lesz a becslés szórása minimális? (3 pont)

41.) Egy osztályban a diákok magassága: (cm)

180	163	150
157	165	165
174	191	172
165	168	186

Elemezd a diákok testmagasságát az átlag, a korrigált tapasztalati szórás, szórási együttható és boxplot ábra (kvartilisek) segítségével! Értelmezd is az eredményeket!

42.) Határozzuk meg az ismeretlen paraméter(ek) maximum likelihood becslését, ha a minta

a.) Pascal (=Geom(p));

b.) Exp(λ);

c.) Poi(λ).

43.) Becsüld a paramétert momentum-módszerrel az alábbi esetekben:

a.) Exp(λ);

b.) Poi(λ);
c.) E(a, b);
d.) E$(-a, a)$.

44.) Legyen az $X_1, \ldots, X_n$ minta a következő diszkrét eloszlásból: P(X_1=1)=c, P(X_1=2)=3c, P(X_1=3)=1-4c (c az ismeretlen paraméter). Tegyük fel, hogy az n mintaelemből y_i darab veszi fel az i értéket (i=1,2,3).
a.) Határozzuk meg c momentum-becslését!
b.) Határozzuk meg c ML-becslését!

45.) Legyen a $Z_1, \ldots, Z_5$ minta N$(m, 2^2)$ eloszlású. A megfigyelt értékek a következők: 6; 4,5; 2,5; 2; 1.
a.) Határozzunk meg 95%-os (99%-os) megbízhatóságú konfidenciaintervallumot m-re!
b.) Hány elemű mintára van szükségünk 95%-os megbízhatósági szinten, ha azt szeretnénk, hogy a konfidenciaintervallum legfeljebb 0,01 hosszúságú legyen?
c.) Mi változik az a.) esetben, ha a szórást nem ismerjük?
d.) Adjunk a szórásra 98%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot.
$\chi^2_{4;0,01} = 0,3$ $\chi^2_{4;0,99} = 13,28$

SZ19.) Határozzuk meg az ismeretlen paraméterek ML becslését, ha a minta N(μ, σ^2), ahol μ valós és σ>0, mindketten paraméterek. (1 pont)

46.) Valaki azt állítja, hogy a klíma változik, és ezt azzal véli bizonyítottnak, hogy az elmúlt 10 évben 2-szer is volt jégeső, pedig korábban az egyes évekre a jégeső valószínűsége a hivatalos adatok alapján csupán p=0.1 volt. Írjuk fel a hipotéziseket, a próbát és állapítsuk meg az elsőfajú hiba valószínűségét, valamint az erőfüggvényt a p=0.2 pontban!

47.) Az alábbi minta 4 év október 18-án Budapesten mért napi középhőmérséklet adatait tartalmazza. Ellenőrizzük a H_0: m =15 hipotézist α =0.05 elsőfajú hibavalószínűség mellett *értelmes* alternatív hipotézissel szemben.
Középhőm. (C fok) adatok:

14,8	12,2	16,8	11,1

a.) A korábbi tapasztalatok alapján tekintsük az értékek szórását 2-nek. Adjuk meg a p-értéket is.
b.) Ne használjunk a szórásra vonatkozóan előzetes információt.

48.) Az Informatikai Kar III. évfolyamán 300-an tanulnak. Megszámolták, hogy a legutóbbi vizsgaidőszakban hányszor buktak az egyes hallgatók. Az eredményeket tartalmazza az alábbi táblázat.

Bukások száma	0	1	2	3	4
Hallgatók száma	80	113	77	27	3

a.) Elfogadhatjuk-e azt a hipotézist, hogy egy hallgató bukásszáma Bin(4; 0,25) eloszlású?
b.) és azt, hogy Bin(4;p) eloszlású?

49.) Az alábbi kontingencia-táblázat mutatja, hogy 100 évben a csapadék mennyisége és az átlaghőmérséklet hogyan alakult.

Csapadék / Hőmérséklet	Kevés	Átlagos	Sok
Hűvös	15	10	5
Átlagos	10	10	20
Meleg	5	20	5

(A cellákban az egyes esetek gyakoriságai találhatóak.) Tekinthető-e a csapadékmennyiség és a hőmérséklet függetlennek?

50.) Legyen X a hatosok száma 6 kockadobásból, Y pedig $X + Z$, ahol Z további 6 kockadobásból a hatosok száma. Mi lesz Y legkisebb négyzetes közelítése X segítségével, ha
a.) X lineáris függvényével közelítünk;
b.) X tetszőleges függvényével közelítünk?

51.) Legyenek adottak a következő (x,y) párok:

x_i	0	1	6	5	3
y_i	4	3	0	1	2

a.) Határozzuk meg és ábrázoljuk is az $aX + b$ alakú regessziós egyenest.
b.) Számoljuk ki a reziduálisokat és becsüljük meg a hiba-szórásnégyzetet.
c.) Adjunk előrejelzést x=10-re a regressziós egyenes alapján.

52.) Véletlenszerűen választunk egy szót az alábbi mondatból: EGY TEVE LEGEL A KERTBEN. A feladatunk az, hogy kitaláljuk a szó hosszát úgy, hogy a tényleges és a tippelt szóhossz közötti eltérés négyzetének várható értéke minimális legyen.
a.) Mit tippelünk, ha semmi információ nem áll rendelkezésünkre?
b.) Hogyan tippelünk, ha valaki megsúgta a szóban szereplő "e"-betűk számát?
c.) Hogyan tippeljünk, ha az "e" betűk számának lineáris függvényét használhatjuk?
