Valószínűségszámítás 1 gyakorlat

Alkalmazott matematikus szakirány

Játékszabályok

- Max 3 gyakorlatról lehet hiányozni – aki többször hiányzik, nem kap gyakjegyet.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - · 40 pont: 60 perces 1. ZH a félév közepén
  - · 60 pont: 90 perces 2. ZH a félév végén
  - · x pont: szorgalmi feladatok – a pótZH-ig lehet beadni/beküldeni
- Mindkét ZH-n minimálisan 30 %-ot kell teljesíteni.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t írsz, és maximum kettest kaphatsz.
- A ZH-kon használható: kellően buta, hagyományos számológép ($\neq$ mobiltelefon) és egy A4-es lapra (akár mindkét oldalára) KÉZZEL írott "puska".
- Osztályozás:

1-es:	0	–	34,99
2-es:	35	–	49,99
3-as:	50	–	64,99
4-es:	65	–	79,99
5-ös:	80	–	10^{∞}

Infók a gyakorlatvezetőről

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@cs.elte.hu`
Honlap	`vargal4.elte.hu`

Ajánlott irodalom – mindegyik példatár

- Bognárné–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Arató–Prokaj–Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet: `http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/valszam/zempleni.pdf`

1.) Egy urnában 3 fehér, 2 zöld és 1 piros golyó van. Egymás után kiveszük 2 golyót az urnából. Mik lesznek a kísérlet lehetséges kimenetelei (azaz az eseménytér elemei), ha a golyók kihúzásának sorrendjét
a.) figyelembe vesszük;
b.) nem vesszük figyelembe.
Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!

2.) 2 számozott érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Mik lesznek az eseménytér elemei? Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!

3.) Tegyük fel, hogy egy irodában 3 titkárnő dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik titkárnő megbetegszik ($i = 1, 2, 3$). Fejezzük ki az A_i események segítségével a következő események valószínűségét:
a.) az első titkárnő megbetegszik;
b.) csak az első titkárnő betegszik meg;
c.) mindhárom titkárnő megbetegszik;
d.) legalább 1 titkárnő megbetegszik;
e.) legalább 2 titkárnő megbetegszik.

4.) Aritmethiában az autók rendszámai ötjegyű számok 00000 és 99999 között. Ezek közül találomra választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) van 6 a jegyek között;
b.) minden számjegy különböző;
c.) minden számjegy egyforma;
d.) csak két számjegy egyezik meg;
e.) három, illetve kettő számjegy megegyezik?

5.) A német labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 20 mezőnyjátékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 10-es csoportba, hogy Schweinsteiger és Özil egymás ellen játszik?

6.) De Méré problémája, 1654. De Méré lovag nagy szerencsejátékos volt, az alábbi két kérdéssel fordult Pascal-hoz:

- Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz?
- Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz?

A lovag tisztában volt vele, hogy az első kérdésre adandó válasz $\frac{1}{2}$-nél kicsivel nagyobb, a másodikra pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsivel kisebb, de fogalma se volt, miért.
a.) Számítsuk ki a két valószínűség pontos értékét!
b.) A két valószínűség miért van közel egymáshoz?

7.) Mintavétel. Adott N különböző termék, amik között van M selejtes. Veszünk n elemű mintát
a.) visszatevés nélkül;
b.) visszatevéssel.
Mennyi a valószínűsége, hogy az n termékből pontosan k selejtest sikerült kiválasztanunk, amennyiben számít a kihúzás sorrendje?

8.) Egy magyarkártya-csomagból visszatevéssel húzunk 3 lapot.
a.) Írjuk fel az eseményteret!
b.) Milyen eséllyel húzunk pontosan egy piros színű lapot?
c.) Milyen eséllyel húzunk legalább egy piros színű lapot?

9.) Tekintsük egy lottóhúzás (5-ös lottó) eredményét.
a.) Írjuk fel az eseményteret!
b.) Milyen eséllyel lesz két találatom?
c.) Milyen eséllyel lesz legalább két találatom?

10.) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy totószelvényt vaktában kitöltve, a 13 mérkőzés eredménye közül éppen 11-et találunk el!

11.) A $(0,1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével 3 részre. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) mindhárom szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{2}$-nél;
b.) a 3 szakaszból háromszög alkotható;
c.) a legrövidebb szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{5}$-nél?

12.) Egy egységnyi hosszúságú pálcát előbb találomra ketté törünk, majd a hosszabbik darabot újra találomra ketté törjük. Mi a valószínűsége, hogy az így kapott 3 pálcából háromszög rakható össze?

13.) Buffon tűproblémája, 1777. A síkon egymástól d távolságra egyenesek vannak. Leejtünk a síkra egy l hosszúságú tűt. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a tű keresztezni fogja valamelyik egyenest, ha a tű
a.) rövid, azaz $l \leq d$;
b.) hosszú, azaz $l > d$.
Mennyi lesz ez a valószínűség, ha $l \to \infty$?

SZ1.) Egy urnában 50 cédula van, rajtuk az $1, 2, \ldots, 50$ számok. Orsi kivesz az urnából 15 cédulát. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott cédulákon lévő számok között legalább 5 osztható 7-tel, ha Orsi a kihúzott cédulákat minden húzás után ha Orsi
a.) visszateszi;
b.) nem teszi vissza. (1p)

SZ2.) Három egyforma rúd mindegyikéből találomra letörnek egy-egy darabot. Mi a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni? (2p)

SZ3.) Legyen n találomra választott pozitív egész szám. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy 2^n az 1 számjeggyel kezdődik! (3p)

14.) Egy hattagú társaság az étteremben három pacalpörköltet, két mátrai borzas csirkemellet, és egy böllér tálat rendel. A pincér a megrendelt ételeket véletlenszerűen osztja szét. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) mindenki azt kapja, amit rendelt;
b.) senki sem azt kapja, amit rendelt?

15.) Gerike a Kinder csokoládéban lévő új játékokat, 'Shali baba' figurákat gyűjt. 10 különböző fajta ilyen baba van, mindegyik Kinder csokoládéba a 10 figura közül véletlenszerűen kerül egy. Gerike nagymamája tudja, hogy ez a gyerek álma, ezért karácsonyra a Jézuskától 20-at rendel a kisfiúnak. Tegyük fel, hogy Gerikének még nincs otthon Shali babája.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy Gerike mind a 10-féle Shali babát begyűjti?
b.) Mi a valószínűsége, hogy éppen a 20. tojás kinyitásánál gyűlik össze a kisfiúnak a 10. fajta baba?

16.) Levelet írtunk húsz barátunknak és a leveleket a megcímzett borítékokba véletlenszerűen tettük bele. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 10 levél kerül ahhoz, akinek szántuk?

17.) Mennyi a valószínűsége, hogy 20 ember közül van olyan hónap, amelyikben egyikük se született?

18.) $2N$ darab molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül N darab térrész valamelyikébe. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik térrészben lesz legalább egy molekula ?

19.) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, ahol $\Omega = \{1,2,3,4\}$ és $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Rendeljünk az elemi eseményekhez olyan valószínűségeket, hogy az $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$ események páronként függetlenek legyenek, de ne legyenek teljesen függetlenek!

20.) Egy k gyerekes családnál ($k \geq 1$) a fiú- és lánygyerek születésének valószínűsége minden gyereknél megegyezik. Tekintsük a következő eseményeket: A_k: a családban legfeljebb 1 lány van; B_k: minden gyerek egyforma nemű; C_k: legalább egy gyerek fiú. Milyen k-ra lesz
a.) A_k és B_k független;
b.) B_k és C_k független;
c.) A_k, B_k és C_k teljesen független?

21.) Egy szekrényben 20 nadrág és 15 ing van. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszek 14 ruhát. Milyen k és l esetén lesznek függetlenek az alábbi események: A_k: összesen k darab inget húzok; B_l: az l-ediknek kihúzott ruhadarab ing?

22.) Milyen $n>1$-re lesz független az a két esemény, hogy
a.) A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van;
b.) A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej?

23.) Osztozkodási probléma, 1494. Hogyan osztozzon az 1600 forintos téten két játékos, ha 2:1-es állásnál félbeszakadt a k győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy az egyes játékok egymástól függetlenek, az első játékos p valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál. Oldjuk meg a feladatot a következő esetekben:
a.) $k = 3$; $p = 1/4$
b.) $k = 4$; $p = 1/2$

24.) Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 10:9 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 11 pontot szerezni.

SZ4.) Pisti feldob egy (szabálytalan) érmét 10-szer egymás után, a fej valószínűsége p. Nézzük a következő eseményeket: A: a dobott számok között nyolc fej van; B: a negyedik dobás eredménye írás. Van-e olyan p, amire A és B események függetlenek egymástól? (1p)

SZ5.) 20 betű – a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J – külön cédulákra van felírva; a cédulák egy körvonal mentén véletlenszerűen vannak elhelyezve, de úgy, hogy a nagy- és kisbetűk a körvonal mentén váltakozzanak. Mi a valószínűsége, hogy azonos kis- és nagybetű ne kerüljön egymás mellé? (2p)

SZ6.) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy két, találomra választott pozitív egész szám relatív prím! (3p)

25.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

26.) Négyen lőnek egymás után egy céltáblára. A résztvevők találati valószínűségei egymástól függetlenül, sorrendben $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$. Ketten érnek el találatot. Mi a valószínűsége, hogy a második hibázta el a lövést?

27.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

28.) Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?

29.) 100 érme közül 10 cinkelt, ezeknél csak $1/4$ a fejdobás valószínűsége. Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, k fejet kaptunk ($k = 0, 1, \ldots, 10$). Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

30.) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és $1/3$ a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozd meg p értékét, ha $3/5$ annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!

31.) Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi $2{\cdot}2$, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

32.) Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány hatost dobott egymás után egy dobókockával. Például ha elsőre hatost, másodikra kettest dob, akkor egyszer lőhet. Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha minden lövésnél $1/1000$ valószínűséggel talál?

33.) Két érmét dobálunk egyszerre, ezt addig ismételgetjük, amíg mindkettővel fejet nem kapunk. Amennyiben tudjuk, hogy párosadik alkalomra adódott először a dupla fej, akkor mi a valószínűsége, hogy a kísérlet befejezése előtt csupa írást kaptunk?

34.) Két doboz közül az elsőben k piros és l zöld golyó van, a másodikban k zöld és l piros. Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó piros, akkor a következő húzásnál az első dobozból; ha zöld, akkor a második dobozból húzunk. Először az első dobozból húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az n. húzásál piros golyót húzunk? Mihez tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$?

35.) **A négy hazudós.** Ismeretes, hogy A, B, C és D személyek egymástól függetlenül, három eset közül csak egy esetben mondanak igazat. Ha A kijelenti, hogy B tagadja, hogy C megerősíti, hogy D hazudott, akkor mi a valószínűsége, hogy D valójában igazat mondott? Tegyük fel, hogy C tudja, hogy D igazat mondott-e; B tisztában van azzal, C igazat mondott-e; A tudja, hogy B igazat mondott-e.

SZ7.) Egy dobozban cédulák vannak, melyekre a 2, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 9 számokat írtuk fel (minden cédulán 1 szám található). Marcsi visszatevés nélkül kihúz két cédulát. Annyit árult el, hogy a céduláin lévő számok párosak. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy kihúzta a 4-est! (1p)

SZ8.) Két doboz közül az elsőben k piros és l zöld golyó van, a másodikban m piros és n kék. Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó piros, akkor a következő húzásnál az első dobozból; ha zöld vagy kék, akkor a második dobozból húzunk. Először az első dobozból húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az i. húzásnál kék golyót húzunk? Mihez tart ez a valószínűség, ha $i \to \infty$? (2p)

36.) Legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ eseménytér, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$. Az alábbi függvények valószínűségi változók $(\Omega, \mathcal{A})$-n?

a.) $X(\{\omega_i\}) = i + 10 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

b.) $X(\{\omega_1\}) = \pi,\ X(\{\omega_2\}) = X(\{\omega_3\}) = X(\{\omega_4\}) = e$;

c.) $X(\{\omega_i\}) = |i - 2| \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

Amennyiben valamelyik nem valószínűségi változó, határozd meg azt a legszűkebb $\mathcal{F}$ σ-algebrát, hogy $(\Omega, \mathcal{F})$-en már valószínűségi változó legyen!

37.) Legyenek A, B, C, D, egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra érünk vissza először A-ba. Írjuk fel X eloszlását! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

38.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

39.) Határozd meg X eloszlását, ha X: hagyományos lottóhúzásnál (90/5) a

a.) találatok száma;

b.) 3-mal oszthatók száma;

c.) legnagyobb kihúzott szám;

d.) k-adik legnagyobb kihúzott szám ($k = 1, \ldots, 5$).

Mutassuk meg, hogy ezek valóban valószínűségi eloszlások!

40.) **Véletlen bolyongás.** Egy tétova hangya a számegyenesen bolyong. 0-ból indul és minden lépésnél egyforma valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lép. Legyen X: $2n$ lépés után a hangya melyik pontban lesz. Határozd meg X eloszlását!

41.) Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy egy évben legfeljebb egy ember lesz így öngyilkos?

42.) Egy sportlövő p valószínűséggel talál el egy léggömböt. Mi lövései számának eloszlása, ha az

a.) első;

b.) ötödik találatig lő?

43.) Addig dobunk két kockával, amíg kétszer elő nem fordul az, hogy a két kockán lévő számjegyek összege 10.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 10-nél kisebb összeget, mielőtt a keresett esemény bekövetkezik?

SZ9.) Legyen $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ eseménytér, $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ σ-algebra. Mutasd meg, hogy $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $X(\{\omega_i\}) = c \quad (i = 1, \ldots, n)$ valószínűségi változó $(\Omega, \mathcal{A})$-n! (1p)

SZ10.) Egy urnában M piros és $N - M$ fehér golyó van. Ezenkívül tömérdek fehér és piros golyó áll rendelkezésünkre. Az urnából találomra kiveszünk egy golyót, majd visszateszünk a kivett színűvel azonos színű és a kihúzottal együtt összesen $R{+}1$ golyót ($R \geq -1$). Ezután az urnából ismét húzunk egy golyót és a fenti eljárást folytatjuk.

Legyen X: n húzás során hány piros színű golyót húztunk. Határozd meg X eloszlását! Mi adódik $R=-1$, illetve $R=0$ esetén? (2p)

44.) Számítsuk ki a kockadobás várható értékét és szórását, ha
a.) a kocka szabályos;
b.) a kocka szabálytalan: két 1-es, három 4-es, egy 6-os van rajta.

45.) Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 db 100 000 Ft-os, és 100 db 1000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

46.) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét és szórását!

47.) Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

48.) Egy 200 oldalas könyvben 20 sajtóliba található véletlenszerűen elszórva.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 100. oldalon több, mint egy ajtóhiba van?
b.) Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 100. oldalon?
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két hajtóhiba van?

49.) n darab dobókockát egyszerre feldobunk.
a.) Hány dobókocka esetén lesz a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kapott számok között pontosan egy hatos van?
b.) Várhatóan mennyi lesz a dobott számok összege?

50.) Átlagosan hányat kell dobnunk
a.) egy érmével, amíg fej és írás is lesz a dobások között?
b.) egy kockával, amíg minden szám kijön?
c.) egy kockával, amíg minden páros szám kijön?

51.) Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó, amiről ismertek: $EX=8$, $DX=2$. Határozd meg a $P(X<16)$ valószínűséget!

52.) Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét és szórását!

53.) Egy szabálytalan érmével dobunk többször egymás után, jelölje p a fej valószínűségét. Legyen X az első, azonosakból álló sorozat hossza; Y a második, azonosakból álló sorozat hossza (ha pl. a dobássorozat FIIIF... akkor $X=1$ és $Y=3$). Számítsuk ki X és Y várható értékét és szórását!

SZ11.) Egy szerencsejátékot igazságosnak hívunk, ha a nyeremény várható értéke megegyezik a játékon való részvétel árával (sorsjegy, lottószelvény stb. ára). Vizsgáld meg, vajon a magyar ötöslottó igazságos-e! Útmutatás: nézz utána (internet) az aktuális heti nyereményösszegeknek és a lottószelvény aktuális árának! (1p)

SZ12.) Az $\{1,2,\ldots,n\}$ számhalmaz összes részhalmazai közül r-szer választunk találomra. A kiválasztott részhalmazokat jelölje $A_1,\ldots,A_r$. Az X valószínűségi változó legyen $\bigcap_{i=1}^{r} A_i$ elemszáma. $EX=?$ (2p)

54.) Írd fel és ábrázold az eloszlásfüggvényt, ha X
a.) indikátorváltozó $p=2/3$ paraméterrel;
b.) egy olyan kockadobás eredménye, ahol a kockán egy 2-es, két 4-es és három 5-ös van.

55.) Lehetnek-e egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényei a következő függvények? Ha igen, akkor van X-nek sűrűségfüggvénye? Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét.

a.) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ \operatorname{tg} x & \text{ha } 0<x\le \frac{\pi}{6}\\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{6}<x\end{cases}$
c.) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ \frac{[x]}{2} & \text{ha } 0<x\le 2\\ 1 & \text{ha } 2<x\end{cases}$

b.) $F(x)=\begin{cases}1-\left(\frac{6}{x}\right)^8 & \text{ha } x>6\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$
d.) $F(x)=\begin{cases}\exp\{(x-1)^3\} & \text{ha } x\le 1\\ 1 & \text{ha } 1<x\end{cases}$

56.) Legyen $F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ cx^3 & \text{ha } 0<x\le 3\\ 1 & \text{ha } 3<x\end{cases}$, ahol c valós paraméter.
a.) Mely c értékek esetén lesz $F(x)$ eloszlásfüggvény?
b.) $P(-1<X<1)=?$ $P(X\ge 3)=?$
c.) Mely c-re létezik sűrűségfüggvény? Határozd meg! $EX=?$ $DX=?$

57.) Legyen $F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 9\\ \frac{3a}{\sqrt{x}}+b & \text{ha } 9<x\le 16\\ 1 & \text{ha } 16<x\end{cases}$, ahol a és b valós paraméterek.
a.) A paraméterek mely értékeire lehet F az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?
b.) $P(8<X<11)=?$ $P(X<9)=?$ $P(X\le 9)=?$
c.) A paraméterek mely értékeire lesz F abszolút folytonos? Határozd meg ekkor a sűrűségfüggvényt, valamint X várható értékét és szórását!

58.) Mely c-re lesz sűrűségfüggvény $f(x)=\begin{cases}c\cdot\sin x & \text{ha } x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$?

59.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x)=\begin{cases}cx^4 & \text{ha } 0<x<1\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$
a.) Határozd meg a c értékét és X eloszlásfüggvényét!
b.) $P(X<-0,5)=?$ $P(X<0,5)=?$ $P(X<1,5)=?$
c.) $D^2(X)=?$

60.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3} & \text{ha } 0<x<2\\ \frac{1}{6} & \text{ha } 2<x<c\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$
a.) $c=?$ $F(x)=?$ $P(X>3)=?$ $P(X=e)=?$
b.) $E(X)=?$ $D(X)=?$

61.) Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2+y^2<5$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét!

62.) Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk két pontot, így a szakaszt rövidebb szakaszokra bontjuk. Jelölje X a kapott szakaszok közül a legrövidebbet. Írd fel X eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, valamint számítsd ki X várható értékét!

63.) Legyenek $X_1 \sim N(2, 3^2)$ és $X_2 \sim N(4, 4^2)$ függetlenek.
- a.) $P(1 \le X_1 < 3) = ?$
- b.) Számítsuk ki b értékét, hogy $P(X_1 \ge b) = 0,7$ teljesüljön!
- c.) $P\left(\frac{X_1 - X_2}{2} > 0\right) = ?$

64.) Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

65.) Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

66.) Egy vállalatnál a szellemi foglalkozásúak teszik ki a dolgozók 60%-át, az ő fizetésük eloszlása (ezer Ft-ban) $Z + 150$, ahol $Z \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{200}\right)$; a fizikai dolgozóé pedig $Y + 100$, ahol $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{100}\right)$.
- a.) Mi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szellemi foglalkozású többet keres 450 ezer Ft-nál?
- b.) Egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó átlagosan mennyit keres?

SZ13.) Adjuk meg a lottón kihúzott öt szám közül a legnagyobb eloszlásfüggvényének az értékét a 45 helyen! (1p)

SZ14.) A c valós állandó mely értékére lehet az $f(x) = c \cdot e^{-\sqrt{|x|}}$ $(x \in \mathbb{R})$ sűrűségfüggvény? $EX = ?$ (2p)

SZ15.) Egy gyárban egyforma kockacukrokat készítenek. Egy adag cukor térfogata a $(0, 10)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó (valamilyen mértékegységben). A kockacukrok közös élhosszúsága szintén a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, mely az adag térfogatától független. Jelölje X, hogy egy adag cukorból hány kockacukrot lehet gyártani. Adjuk meg X eloszlását! Folytonos vagy diszkrét eloszlású az X? (3p)

67.) Legyen X diszkrét valószínűségi változó az alábbi eloszlással: $P(X = i) = \frac{1}{6}$, ahol $i = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
- a.) Határozd meg $Y = X^2$ eloszlását és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(X^2) = (EX)^2$?
- b.) Igaz-e, hogy $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{EX}$?

68.) Legyen $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Határozd meg $\frac{1}{X+1}$ várható értékét!

69.) Határozd meg $Y = -\log(X)$ sűrűségfüggvényét, ha X valószínűségi változó
- a.) exponenciális eloszlású;
- b.) egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon.

70.) Legyen $X \sim E(-1, 1)$ és $Y = 2^X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(2^X) = 2^{EX}$?

71.) Legyen $X \sim N(2, 1)$ és $Y = X^5$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

72.) Legyen $X \sim N(0,1)$. Adjuk meg
a.) $Y = \sigma X + m$, ahol $\sigma > 0$ és m valós számok;
b.) $Y = e^{tX}$, ahol $t \in \mathbb{R}$;
c.) $Y = X^2$.
sűrűségfüggvényét és várható értékét. $P(Y < 1) =$?

73.) Legyen $X \sim E(-1,2)$ és $Y = |X-1|$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

74.) Egy egységnégyzetből válasszunk ki egy tetszőleges pontot, jelölje X és Y a kiválasztott pont két koordinátáját.
a.) $U = X + Y$
b.) $U = -\log(XY)$
Határozd meg U eloszlás-, sűrűségfüggvényét és várható értékét!

75.) Adjunk meg olyan X valószínűségi változót, amire
a.) $X \overset{d}{=} -X$, azaz X és $-X$ ugyanolyan eloszlású;
b.) $X \overset{d}{=} X+1$;
c.) $X \overset{d}{=} \frac{1}{X}$;

SZ16.) Legyen $X \sim E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ és $Y = \mathrm{tg}X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! (1p)

SZ17.) Legyen $X \sim N(1,2^2)$ és $Y = X^4 + 2X^2 + 1$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! (2p)

SZ18.) Legyen $X \sim E(a,b)$ és Y Weibull-eloszlású λ és n paraméterekkel, azaz Y eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$. Van olyan h függvény, amire $Y = h(X)$ teljesül? (3p)

76.) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. val. változók; N nemnegatív egész, X_i-ktől független val. változó. Legyen $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (*véletlen* tagszámú összeg). Bizonyítsuk be, hogy
a.) $EY = EX_1 \cdot EN \rightsquigarrow$ **Wald-lemma**;
b.) $D^2Y = D^2X_1 \cdot EN + E^2X_1 \cdot D^2N$.

77.) Egy dobozban az 1,2,3,4 feliratú 4 cédula van. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 4-es nem kerül a kezünkbe. Határozzuk meg a kihúzott számok összegének a várható értékét és szórását!

78.) Addig dobunk egy szabályos kockával, míg 6-ost nem kapunk. Számítsd ki a megdobott számok szorzatának várható értékét!

79.) Egy dobozban 3 cédula van, rajtuk az 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ számok. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 1-est nem kapunk. Határozzuk meg a kihúzott számok szorzatának várható értékét!

80.) Egy bányász a bánya egyik termében rekedt, ahonnan öt út nyílik. Az egyik egy három perces út végén a szabadba vezet. A többi négy közül kettő út esetén öt, másik kettő esetén pedig hét percnyi séta után visszatér ugyanebbe a terembe. A bányász teljesen össze van zavarodva, minden alkalommal a többi választásától függetlenül egyenlő valószínűséggel választ egyet az utak közül. Legyen X a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi X várható értéke?

81.) Egy szabályos kockát addig dobálunk, amíg a 6 és 5 számot nem kapjuk két egymás utáni dobás eredményeként. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét!

82.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FF sorozat megjelenik. Átlagosan mennyit (hány dobásnyit) kell erre várnunk?

83.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FFI vagy az FIF sorozat megjelenik. Mennyi a valószínűsége, hogy FFI jön előbb? Mennyit dobunk átlagosan?

84.) Eszter és Anna 3 érmével játszik. A játék során felváltva dobják fel a birtokukban lévő összes érmét, s a fejre esett érméket átadják társuknak. A játék addig tart, amíg valamelyik dobás után az összes érme egyik játékoshoz kerül. Kezdetben Eszternél van mind a 3 érme és ő dob először. Mekkora valószínűséggel nyer Eszter?

85.) Fej vagy írást játszunk egy szabályos érmével: ha fejet dobunk, megnyerjük a tétet, ha írást, elveszítjük. Amikor leülünk játszani, 1 petákunk van és az a célunk, hogy 5 petákot gyűjtsünk. Feltesszük az összes pénzünket, illetve annyit, amennyi hiányzik a célunk eléréséhez.
a.) Mekkora valószínűséggel érjük el a célunkat?
b.) Válaszoljunk a kérdésekre "óvatos stratégia" esetén is, azaz, ha minden játszmában csak 1 petákot teszünk fel!

SZ19.) Egy kockával addig dobunk, amíg valamelyik korábban dobott szám ismételten előfordul. Határozd meg a szükséges dobásszám várható értékét! (1p)

SZ20.) Egy érmével addig dobunk, amíg k hosszúságú fejsorozat vagy s hosszúságú írássorozat nem adódik. Mennyit dobunk átlagosan? (2p)

SZ21.) Egy városban az úthálózat gráfja egy ikozaéder élhálózatának gráfjával egyezik meg. Jolán háza az ikozaéder egyik csúcsában van, munkahelye pedig az ezzel szemközti csúcsban. Sötétedés után munkahelyéről hazafelé menet minden egyes csúcsba érve elbizonytalanodik, hogy merre is haladjon tovább. Tegyük fel, hogy minden csúcsban p annak a valószínűsége, hogy találkozik valakivel, aki mutat neki egy olyan irányt, amerre elindulva a legkevesebb élen haladva a szállására juthat. Ellenkező esetben véletlenszerűen halad tovább úgy, hogy egyik irány sincs kitüntetve, vagyis előfordulhat akár az is, hogy visszafordul. Mekkora p érték esetén lesz 50% annak a valószínűsége, hogy előbb ér haza, minthogy a munkahelyére visszatalálna? (3p)

86.) Az Y és X valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$X \backslash Y$	1	2	3	X peremeloszlása
5	$\frac{1}{10}$	...	...	...
10	...	$\frac{2}{10}$	...	...
Y peremeloszlása	...	...	$\frac{4}{10}$	...

a.) Töltsd ki a táblázatot, ha $EX = 7$ és $EY = \frac{11}{5}$!
b.) X és Y függetlenek egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!
c.) Add meg $(X,Y)^T$ valószínűségi vektorváltozó kovariancia mátrixát és korrelációs

mátrixát!

d.) $P(X < 7 \mid Y < 3) =?$

e.) $E(Y \mid X = 10) =?$

87.) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	
2	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	
X peremeloszlása				

Határozd meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét! Függetlenek-e egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!

88.) Legyen X és Y független, azonos eloszlású. Tegyük fel azt is, hogy véges szórásúak. $R(X, aX + bY) =?$

89.) Egy dobozban 10 piros, 10 fehér, 10 zöld, 10 kék cédula van, mindegyik 1-től 10-ig számozva. Visszatevéssel húzunk kétszer. Legyen X a pirosak száma a kihúzottak között; Y a kékek száma; Z a 10-esek száma. Határozd meg

a.) X és Y;

b.) X és Z

együttes eloszlását és korrelációját!

90.) Egy 52 lapos francia kártyacsomagból húzunk 2 lapot visszatevés nélkül. Legyen X a kőrök, Y pedig az ászok száma. Adjuk meg X és Y korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e ezek a változók?

91.) Egy szabályos kockával dobunk. Jelölje X a dobott számot, Y pedig azt, hogy a dobott szám hárommal osztva milyen maradékot ad. $R(X, Y) =?$

92.) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen X értéke 1, ha az első dobás fej, és 0, ha írás. Legyen Y értéke 1, ha a második dobás fej, és 0, ha írás. Mutassuk meg, hogy $X + Y$ és $|X - Y|$ korrelálatlanok, de nem függetlenek!

93.) Egy dobozban 5 piros és 5 kék golyó van, amiből 100-szor húzunk visszatevéssel. Jelölje X az első 50, Y az első 75, Z pedig az utolsó 30 húzásból a pirosak számát. Határozzuk meg $X + Z$ és Y korrelációs együtthatóját!

94.) 100-szor húzunk visszatevéssel egy olyan dobozból, amelyben 1 piros és 2 fehér golyó van. X jelentse a kihúzott piros golyók számát az első 50, Y pedig az első 20 kísérletben. $R(X, Y) =?$

95.) Egy kockát 10-szer feldobunk. X a dobott 6-osok száma, Y a dobott páratlan számok száma. Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját!

96.) Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a megállások számának várható értéke és szórása?

97.) Számítsuk ki az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz véletlen permutációi között a fixpontok számának várható értékét és szórásnégyzetét!

98.) Mely c valós paraméter esetén lesznek kétdimenziós sűrűségfüggvények az alábbiak? Adjuk meg az együttes eloszlásfüggvényt, valamint a peremsűrűségfüggvényeket! $P\left(X > \frac{1}{2},\ Y < 1\right) =?$ Független X és Y? $R(X, Y) =?$

a.) $f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{ha } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

b.) $f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{ha } (x,y) \in (0,2)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

c.) $f(x,y) = ce^{-\frac{x^2+4y^2}{2}}, \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$

d.) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{2}e^{-y} & 1 < x < c \text{ és } 0 < y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

99.) Legyenek

a.) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ és $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ függetlenek;

b.) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ és $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ függetlenek;

c.) $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ és $Y \sim \mathrm{Geo}(p)$ függetlenek.

Milyen eloszlású X az $X + Y = l$ feltétel mellett? Határozd meg az $E(X|X + Y = l)$ feltételes várható értéket!

100.) Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y} I(x > 0, y > 0)$.

a.) Határozd meg Y peremeloszlását!

b.) Milyen eloszlású X az $Y = y$ feltétel mellett? $E(X|Y = y) =?$

101.) Legyen (X, Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörlapon. Számítsuk ki az $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvényt és az $E(X^2|Y)$ feltételes várható értéket!

102.) Legyen $X \sim E\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ és $Y|X = x \sim E\left(0, x\right)$, ha $\frac{1}{2} < x < 1$.

a.) Határozd meg az együttes eloszlást!

b.) Ez alapján oldd meg a 12.) feladatot!

c.) Határozd meg az $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvényt, majd az $E(X|Y = y)$ feltételes várható értéket!

SZ22.) Legyen (X, Y) diszkrét valószínűségi vektorváltozó, mely 3 értéket vesz fel azonos valószínűséggel: $(-1; 0,5), (0; 1), (1; 1,5)$. $R(X, Y) =?$ Meglepő-e az eredmény és miért? (1p)

SZ23.) Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlásúak, $R(X_i, X_j) = r \quad \forall i \neq j$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $r \geq 0$! (2p)

SZ24.) Milyen eloszlású X és Y, ha együttes sűrűségfüggvényük ($r \in [-1, 1] \cap \mathbb{R}$)
$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 - 2rxy + y^2)\right)$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$? $R(X, Y) =?$ (3p)

103.) Megadható-e olyan 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változó, amelyre $P(|X| \geq 2) \geq 0,5$?

104.) U és V valószínűségi változókról a következőket tudjuk: $R(U, V) = -0,75$; $EU = 4$; $EV = 6$; $D(U) = D(V) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Becsüld alulról a $P(7 < U + V < 12)$ valószínűséget!

105.) Hamis érmével dobunk, a fej valószínűsége 0,51.

a.) Becsüljük meg a Csebisev-egyenlőtlenséggel, majd a centrális határértéktétel segítségével is annak a valószínűségét, hogy 10 ezer dobásból legalább 5150 fej!

b.) Hányszor kell dobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 97,5 %-os valószínűséggel több legyen, mint 0,505?

106.) Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

107.) Egy életbiztosító társaságnak 10000 biztosítottja van, tegyük fel, hogy ők egyforma korúak és egészségűek. 1% annak a valószínűsége, hogy egy ilyen személy az év folyamán meghal. Minden biztosított az év elején 11 ezer Ft-ot fizet be, halála esetén pedig hozzátartozói 1 millió Ft-ot kapnak a biztosítótól. Mi a valószínűsége, hogy a biztosító egy évben ezen biztosításra vonatkozóan nem lesz veszteséges?

108.) Legalább hány embert kell megkérdezni egy közvéleménykutatásnál, ha egy adott párt támogatottságát (az eltérést a várható támogatottságtól) legalább 95%-os valószínűséggel 0,01–nél kisebb eltéréssel szeretnénk megbecsülni?

a.) Számoljunk a Csebisev-egyenlőtlenséggel.

b.) Számoljunk a normális eloszlással.

109.) Egy dobókockát 720-szor feldobunk. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott 6-osok száma legalább 110, de 140-nél kisebb!

110.) Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1,0,2,2 számok. 192-szer húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 108, de 162-nél kisebb!

111.) X_i-k $(i = 1, 2, \ldots)$ független val. változók Hova konvergál és hogyan?

a.) $X_i \sim \mathrm{Ind}(p)$ $\frac{X_1^5+\ldots+X_n^5}{n}$

b.) X_i: az i-edik kockadobás eredménye $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$

c.) $X_i \sim \mathrm{Exp}(2)$ $\frac{e^{X_1}+\ldots+e^{X_n}}{n}$

112.) Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$

SZ25.) Egy szabályos kockát dobálunk. Hova tart és milyen értelemben a dobott számok mértani közepe? (1p)

SZ26.) Számítsuk ki n elem találomra választott permutációjában az m hosszú ciklusok számának eloszlását! Mihez tart ez az eloszlás $n \to \infty$ esetén? (2p)
Útmutatás: használd a Jordán-formulát!

SZ27.) Egy szabályos érmével addig dobunk, amíg mind a fejekből, mind az írásokból legalább k darabot nem kapunk. Jelölje ν_k az ehhez szükséges dobások számát. Számítsd ki $\frac{\nu_k - 2k}{\sqrt{2k}}$ határeloszlását, ha $k \to \infty$! (3p)

113.) Legyen X nemnegatív egész diszkrét valószínűségi változó. X generátorfüggvényének hívjuk az $Y = z^X$ valószínűségi változó várható értékét, jelölje $G_X(z) = E(z^X)$. Mutassuk meg, hogy

a.) $G_X(1) = 1$

b.) $P(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$ $k = 0, 1, \ldots$

c.) $EX = G'_X(1)$

d.) $D^2X = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$

114.) Legyenek X és Y nemnegatív egész diszkrét valószínűségi változók. Igaz-e hogy

a.) amennyiben X és Y függetlenek, akkor $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$;

b.) amennyiben $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$, akkor X és Y függetlenek?

115.) Legyen $X, X_1, X_2, \ldots$ nemnegatív egész, i.i.d. diszkrét valószínűségi változó. Határozd meg Y generátorfüggvényét, ha

a.) $Y = aX + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$;

b.) $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, ahol N az X_i-ktől független, pozitív diszkrét valószínűségi változó.

116.) Két kockával addig dobunk, amíg mindkét kockán 6-ost nem kapunk. Adjuk meg a szükséges dobások számának generátorfüggvényét!

117.) Legyenek X és Y függetlenek, p, illetve q paraméterű Pascal-eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $Z = \min(X, Y)$ generátorfüggvényét!

118.) Az alábbi függvények egy-egy valószínűségi változó generátorfüggvényei:

a.) $G(u) = e^{2u-2}$;

b.) $G(u) = \frac{u^2+u+2}{4}$.

Határozd meg a valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását a generátorfüggvény segítségével!

119.) Egy organizmus pontosan 1 napon keresztül él, a nap végén életet ad hozzá hasonló organizmusoknak, és elpusztul. Jelölje X_n: az n. nap elején hány organizmus él, azaz az n. "generáció" hány főből áll. Legyen N: a született organizmusok száma, ami egy μ várható értékű, nemnegatív egész értékű diszkrét valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy két organizmus halálakor a született "gyerekek" száma egymástól független.

a.) Határozd meg X_n generátorfüggvényét!

b.) Várhatóan hány fős lesz az n. generáció?

c.) Számítsd ki az organizmus kihalásának valószínűségét, azaz a $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ értéket!

d.) Mi a feltétele annak, hogy az organizmus 1 valószínűséggel kihaljon?

SZ28.) Jelölje $u(n)$ annak a valószínűségét, hogy az A és $\overline{A}$ egymás után először az $(n-1)$-edik és n-edik kísérletekben következik be $(P(A) = p)$. Írjuk fel a generátorfüggvényt, a várható értéket és a szórásnégyzetet is! (1p)

SZ29.) Egy kockával addig dobunk, amíg meg nem dobjuk a 6. hatost. Jelölje X a szükséges dobások számát. Határozzuk meg X generátorfüggvényét! (2p)
