Valószínűségszámítás gyakorlat
Matematikai elemző szakirány

Játékszabályok

- Max 3 gyakorlatról lehet hiányozni – aki többször hiányzik, nem kap gyakjegyet.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - · 50 pont: 1. ZH a félév közepén
  - · 50 pont: 2. ZH a félév végén
  - · x pont: szorgalmi feladatok – a pótZH-ig lehet beadni/beküldeni
- Mindkét ZH-n minimálisan 30 %-ot, azaz 15 pontot kell teljesíteni.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t írsz, és maximum kettest kaphatsz.
- A ZH-kon használható: kellően buta, hagyományos számológép ($\neq$ mobiltelefon) és egy A4-es lapra (akár mindkét oldalára) KÉZZEL írott "puska".
- Osztályozás:

1-es:	0	–	34,99
2-es:	35	–	49,99
3-as:	50	–	64,99
4-es:	65	–	79,99
5-ös:	80	–	10^{∞}

Infók a gyakorlatvezetőről

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@cs.elte.hu`
Honlap	`vargal4.elte.hu`

Ajánlott irodalom – mindegyik példatár

- Bognárné–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok
- Arató–Prokaj–Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet: `http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/valszam/zempleni.pdf`

1.) Egy urnában 3 fehér, 2 zöld és 1 piros golyó van. Egymás után kiveszük 2 golyót az urnából. Mik lesznek a kísérlet lehetséges kimenetelei (azaz az eseménytér elemei), ha a golyók kihúzásának sorrendjét
a.) figyelembe vesszük;
b.) nem vesszük figyelembe.
Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!

2.) 2 számozott érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Mik lesznek az eseménytér elemei? Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!

3.) Tegyük fel, hogy egy irodában 3 titkárnő dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik titkárnő megbetegszik ($i = 1, 2, 3$). Fejezzük ki az A_i események segítségével a következő események valószínűségét:
a.) az első titkárnő megbetegszik;
b.) csak az első titkárnő betegszik meg;
c.) mindhárom titkárnő megbetegszik;
d.) legalább 1 titkárnő megbetegszik;
e.) legalább 2 titkárnő megbetegszik.

4.) Aritmethiában az autók rendszámai ötjegyű számok 00000 és 99999 között. Ezek közül találomra választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) van 6 a jegyek között;
b.) minden számjegy különböző;
c.) minden számjegy egyforma;
d.) csak két számjegy egyezik meg;
e.) három, illetve kettő számjegy megegyezik?

5.) A német labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 20 mezőnyjátékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 10-es csoportba, hogy Schweinsteiger és Özil egymás ellen játszik?

6.) Mintavétel. Adott N különböző termék, amik között van M selejtes. Veszünk n elemű mintát
a.) visszatevés nélkül;
b.) visszatevéssel.
Mennyi a valószínűsége, hogy az n termékből pontosan k selejtest sikerült kiválasztanunk, amennyiben számít a kihúzás sorrendje?

7.) Egy magyarkártya-csomagból visszatevéssel húzunk 3 lapot.
a.) Írjuk fel az eseményteret!
b.) Milyen eséllyel húzunk pontosan egy piros színű lapot?
c.) Milyen eséllyel húzunk legalább egy piros színű lapot?

8.) Tekintsük egy lottóhúzás (5-ös lottó) eredményét.
a.) Írjuk fel az eseményteret!
b.) Milyen eséllyel lesz két találatom?
c.) Milyen eséllyel lesz legalább két találatom?

9.) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy totószelvényt vaktában kitöltve, a 13 mérkőzés eredménye közül éppen 11-et találunk el!

10.) Bertrand-paradoxon, 1889. Tekintsünk egy kört és válasszuk ki találomra az egyik húrját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala?

11.) Egy R sugarú körbe szabályos háromszöget írunk. Mi a valószínűsége, hogy a körlapon véletlenül kiválasztva egy pontot, az a szabályos háromszög belsejébe fog esni?

12.) A $(0, 1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével 3 részre. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) mindhárom szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{2}$-nél;

b.) a 3 szakaszból háromszög alkotható;
c.) a legrövidebb szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{5}$-nél?

SZ1.) Egy urnában 50 cédula van, rajtuk az $1, 2, \ldots, 50$ számok. Orsi kivesz az urnából 15 cédulát. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott cédulákon lévő számok között legalább 5 osztható 7-tel, ha Orsi a kihúzott cédulákat minden húzás után ha Orsi
a.) visszateszi;
b.) nem teszi vissza. (1p)

SZ2.) Három egyforma rúd mindegyikéből találomra letörnek egy-egy darabot. Mi a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni? (2p)

13.) Egy 32 tagú osztályban a diákok angolt, németet vagy franciát tanulhatnak. Tudjuk, hogy angolul 20-an tanulnak, németül 12-en, franciául pedig 9-en. Angolul és németül egyszerre 5-en, németül és franciául egyszerre 3-an, angolul és franciául 2-en, és senki nem tanulja mind a három nyelvet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott tanuló legalább az egyik idegen nyelvet tanulja?

14.) Egy hattagú társaság az étteremben három pacalpörköltet, két mátrai borzas csirkemellet, és egy böllér tálat rendel. A pincér a megrendelt ételeket véletlenszerűen osztja szét. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) mindenki azt kapja, amit rendelt;
b.) senki sem azt kapja, amit rendelt?

15.) Gerike a Kinder csokoládéban lévő új játékokat, 'Shali baba' figurákat gyűjt. 10 különböző fajta ilyen baba van, mindegyik Kinder csokoládéba a 10 figura közül véletlenszerűen kerül egy. Gerike nagymamája tudja, hogy ez a gyerek álma, ezért karácsonyra a Jézuskától 20-at rendel a kisfiúnak. Tegyük fel, hogy Gerikének még nincs otthon Shali babája. Mennyi a valószínűsége, hogy Gerike mind a 10-féle Shali babát begyűjti?

16.) Mennyi a valószínűsége, hogy 20 ember közül van olyan hónap, amelyikben egyikük se született?

17.) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, ahol $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ és $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Rendeljünk az elemi eseményekhez olyan valószínűségeket, hogy az $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}$ események páronként függetlenek legyenek, de ne legyenek teljesen függetlenek!

18.) Egy k gyerekes családnál ($k \geq 1$) a fiú- és lánygyerek születésének valószínűsége minden gyereknél megegyezik. Tekintsük a következő eseményeket: A_k: a családban legfeljebb 1 lány van; B_k: minden gyerek egyforma nemű; C_k: legalább egy gyerek fiú. Milyen k-ra lesz
a.) A_k és B_k független;
b.) B_k és C_k független;
c.) A_k, B_k és C_k teljesen független?

19.) Milyen $n>1$-re lesz független az a két esemény, hogy
a.) A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van;
b.) A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej?

20.) Két kockával dobunk. Tekintsük a következő három eseményt:
A: dobtunk 1-est; B: az összeg 7; C: dobtunk 6-ost
Mely eseménypárok függetlenek? Igaz-e, hogy a három esemény teljesen független?

21.) Osztozkodási probléma, 1494. Hogyan osztozzon az 1600 forintos téten két játékos, ha 2:1-es állásnál félbeszakadt a k győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy az egyes játékok egymástól függetlenek, az első játékos p valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál. Oldjuk meg a feladatot a következő esetekben:
a.) $k = 3$; $p = 1/4$
b.) $k = 4$; $p = 1/2$

22.) Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 10:9 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 11 pontot szerezni.

SZ3.) Pisti feldob egy (szabálytalan) érmét 10-szer egymás után, a fej valószínűsége p. Nézzük a következő eseményeket: A: a dobott számok között nyolc fej van; B: a negyedik dobás eredménye írás. Van-e olyan p, amire A és B események függetlenek egymástól? (1p)

SZ4.) Egy százszemélyes repülőgépen száz ember utazik úgy, hogy mindenkinek van előre kiosztott helye. Az első utas ezzel nem törődve véletlenszerűen leül a száz közül egy helyre. Ezután minden utas a saját helyére próbál leülni, vagy ha az foglalt, véletlenszerűen választ egy másikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a századik utas a helyére ül, ha egyszerre csak egy ember foglal helyet? (2p)

23.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

24.) Négyen lőnek egymás után egy céltáblára. A résztvevők találati valószínűségei egymástól függetlenül, sorrendben $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$. Ketten érnek el találatot. Mi a valószínűsége, hogy a második hibázta el a lövést?

25.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

26.) Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?

27.) 100 érme közül 10 cinkelt, ezeknél csak 1/4 a fejdobás valószínűsége. Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, k fejet kaptunk ($k = 0, 1, \ldots, 10$). Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

28.) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és 1/3 a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozd meg p értékét, ha 3/5 annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!

29.) Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi

2·2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

30.) Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány hatost dobott egymás után egy dobókockával. Például ha elsőre hatost, másodikra kettest dob, akkor egyszer lőhet. Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha minden lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?

31.) Két érmét dobálunk egyszerre, ezt addig ismételgetjük, amíg mindkettővel fejet nem kapunk. Amennyiben tudjuk, hogy párosadik alkalomra adódott először a dupla fej, akkor mi a valószínűsége, hogy a kísérlet befejezése előtt csupa írást kaptunk?

SZ5.) Egy hamis érmét addig dobálunk, amíg fejet nem kapunk. Annak a valószínűsége, hogy páros sokszor kell dobnunk, harmad akkora, mint annak, hogy páratlan sokszor. Mekkora a fejdobás valószínűsége? (1p)

SZ6.) Egy dobozban cédulák vannak, melyekre a 2, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 9 számokat írtuk fel (minden cédulán 1 szám található). Marcsi visszatevés nélkül kihúz két cédulát. Annyit árult el, hogy a céduláin lévő számok párosak. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy kihúzta a 4-est! (2p)

32.) Legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ eseménytér, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$. Az alábbi függvények valószínűségi változók $(\Omega, \mathcal{A})$-n?

a.) $X(\{\omega_i\}) = i + 10 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

b.) $X(\{\omega_1\}) = \pi,\ X(\{\omega_2\}) = X(\{\omega_3\}) = X(\{\omega_4\}) = e$;

c.) $X(\{\omega_i\}) = |i - 2| \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

Amennyiben valamelyik nem valószínűségi változó, határozd meg azt a legszűkebb $\mathcal{F}$ σ-algebrát, hogy $(\Omega, \mathcal{F})$-en már valószínűségi változó legyen!

33.) Legyenek A, B, C, D, egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra érünk vissza először A-ba. Írjuk fel X eloszlását! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

34.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

35.) Határozd meg X eloszlását, ha X: hagyományos lottóhúzásnál (90/5) a

a.) találatok száma;

b.) 3-mal oszthatók száma;

c.) legnagyobb kihúzott szám;

d.) k-adik legnagyobb kihúzott szám $(k = 1, \ldots, 5)$.

Mutassuk meg, hogy ezek valóban valószínűségi eloszlások!

36.) Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy egy évben legfeljebb egy ember lesz így öngyilkos?

37.) Egy sportlövő p valószínűséggel talál el egy léggömböt. Mi lövései számának eloszlása, ha az

a.) első;

b.) ötödik találatig lő?

SZ7.) Legyen $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ eseménytér, $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ σ-algebra. Mutasd meg, hogy $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $X(\{\omega_i\}) = c \quad (i = 1, \ldots, n)$ valószínűségi változó $(\Omega, \mathcal{A})$-n! (1p)

SZ8.) Egy villamosszerelvény három kocsijába 12 utas száll fel, mindegyik találomra választott kocsiba lép be. Legyen X: az üresen maradt kocsik száma. Határozd meg X eloszlását, és mutasd meg, hogy az valóban valószínűség-eloszlás! (2p)

38.) Számítsuk ki a kockadobás várható értékét és szórását, ha

a.) a kocka szabályos;

b.) a kocka szabálytalan: két 1-es, három 4-es, egy 6-os van rajta.

39.) Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 db 100 000 Ft-os, és 100 db 1000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

40.) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét és szórását!

41.) Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

42.) Egy 200 oldalas könyvben 20 sajtóliba található véletlenszerűen elszórva.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 100. oldalon több, mint egy ajtóhiba van?

b.) Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 100. oldalon?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két hajtóhiba van?

43.) n darab dobókockát egyszerre feldobunk.

a.) Hány dobókocka esetén lesz a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kapott számok között pontosan egy hatos van?

b.) Várhatóan mennyi lesz a dobott számok összege?

44.) Átlagosan hányat kell dobnunk

a.) egy érmével, amíg fej és írás is lesz a dobások között?

b.) egy kockával, amíg minden szám kijön?

c.) egy kockával, amíg minden páros szám kijön?

45.) Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó, amiről ismertek: $EX = 8$, $DX = 2$. Határozd meg a $P(X < 16)$ valószínűséget!

SZ9.) Egy szerencsejátékot igazságosnak hívunk, ha a nyeremény várható értéke megegyezik a játékon való részvétel árával (sorsjegy, lottószelvény stb. ára). Vizsgáld meg, vajon a magyar ötöslottó igazságos-e! Útmutatás: nézz utána (internet) az aktuális heti nyereményösszegeknek és a lottószelvény aktuális árának! (1p)

SZ10.) Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számhalmaz összes részhalmazai közül r-szer választunk találomra. A kiválasztott részhalmazokat jelölje $A_1, \ldots, A_r$. Az X valószínűségi változó legyen $\bigcap_{i=1}^{r} A_i$ elemszáma. $EX =?$ (2p)

46.) Írd fel és ábrázold az eloszlásfüggvényt, ha X

a.) indikátorváltozó $p = 2/3$ paraméterrel;

b.) egy olyan kockadobás eredménye, ahol a kockán egy 2-es, két 4-es és három 5-ös van.

47.) Lehetnek-e egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényei a következő függvények? Ha igen, akkor van X-nek sűrűségfüggvénye? Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét.

a.) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{6} < x \end{cases}$ c.) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{[x]}{2} & \text{ha } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{ha } 2 < x \end{cases}$

b.) $F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{6}{x}\right)^8 & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ d.) $F(x) = \begin{cases} \exp\{(x-1)^3\} & \text{ha } x \le 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$

48.) Legyen $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ cx^3 & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$, ahol c valós paraméter.
a.) Mely c értékek esetén lesz $F(x)$ eloszlásfüggvény?
b.) $P(-1 < X < 1) =?$ $P(X \ge 3) =?$
c.) Mely c-re létezik sűrűségfüggvény? Határozd meg! $EX =?$ $DX =?$

49.) Legyen $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 9 \\ \frac{3a}{\sqrt{x}} + b & \text{ha } 9 < x \le 16 \\ 1 & \text{ha } 16 < x \end{cases}$, ahol a és b valós paraméterek.
a.) A paraméterek mely értékeire lehet F az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?
b.) $P(8 < X < 11) =?$ $P(X < 9) =?$ $P(X \le 9) =?$
c.) A paraméterek mely értékeire lesz F abszolút folytonos? Határozd meg ekkor a sűrűségfüggvényt, valamint X várható értékét és szórását!

50.) Mely c-re lesz sűrűségfüggvény $f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{ha } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$?

51.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} cx^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
a.) Határozd meg a c értékét és X eloszlásfüggvényét!
b.) $P(X < -0,5) =?$ $P(X < 0,5) =?$ $P(X < 1,5) =?$
c.) $D^2(X) =?$

52.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } 2 < x < c \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
a.) $c =?$ $F(x) =?$ $P(X > 3) =?$ $P(X = e) =?$
b.) $E(X) =?$ $D(X) =?$

53.) Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 5$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét!

54.) Legyenek $X_1 \sim N(2, 3^2)$ és $X_2 \sim N(4, 4^2)$ függetlenek.
a.) $P(1 \le X_1 < 3) =?$
b.) Számítsuk ki b értékét, hogy $P(X_1 \ge b) = 0,7$ teljesüljön!
c.) $P\left(\frac{X_1 - X_2}{2} > 0\right) =?$

55.) Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

56.) Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

57.) Egy vállalatnál a szellemi foglalkozásúak teszik ki a dolgozók 60%-át, az ő fizetésük eloszlása (ezer Ft-ban) $Z + 150$, ahol $Z \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{200}\right)$; a fizikai dolgozóé pedig $Y + 100$, ahol $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{100}\right)$.
a.) Mi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szellemi foglalkozású többet keres 450 ezer Ft-nál?
b.) Egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó átlagosan mennyit keres?

SZ11.) Adjuk meg a lottón kihúzott öt szám közül a legnagyobb eloszlásfüggvényének az értékét a 45 helyen! (1p)

SZ12.) A c valós állandó mely értékére lehet az $f(x) = c \cdot e^{-\sqrt{|x|}}$ $(x \in \mathbb{R})$ sűrűségfüggvény? $EX =?$ (2p)

58.) Legyen X diszkrét valószínűségi változó az alábbi eloszlással: $P(X = i) = \frac{1}{6}$, ahol $i = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
a.) Határozd meg $Y = X^2$ eloszlását és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(X^2) = (EX)^2$?
b.) Igaz-e, hogy $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{EX}$?

59.) Határozd meg $Y = -\log(X)$ sűrűségfüggvényét, ha X valószínűségi változó
a.) exponenciális eloszlású;
b.) egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon.

60.) Legyen $X \sim E(-1, 1)$ és $Y = 2^X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(2^X) = 2^{EX}$?

61.) Legyen $X \sim N(2, 1)$ és $Y = X^5$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

62.) Legyen $X \sim N(0, 1)$. Adjuk meg
a.) $Y = \sigma X + m$, ahol $\sigma > 0$ és m valós számok;
b.) $Y = X^2$.
sűrűségfüggvényét és várható értékét. $P(Y < 1) =?$

63.) Egy egységnégyzetből válasszunk ki egy tetszőleges pontot, jelölje X és Y a kiválasztott pont két koordinátáját.
a.) $U = X + Y$
b.) $U = -\log(XY)$
Határozd meg U eloszlás-, sűrűségfüggvényét és várható értékét!

SZ13.) Legyen $X \sim E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ és $Y = \operatorname{tg} X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! (1p)

SZ14.) Legyen $X \sim N(1, 2^2)$ és $Y = X^4 + 2X^2 + 1$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! (2p)

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

64.) Egy dobozban az 1,2,3,4 feliratú 4 cédula van. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 4-es nem kerül a kezünkbe. Határozzuk meg a kihúzott számok összegének a várható értékét!

65.) Egy dobozban 3 cédula van, rajtuk az 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ számok. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 1-est nem kapunk. Határozzuk meg a kihúzott számok szorzatának várható értékét!

66.) Egy bányász a bánya egyik termében rekedt, ahonnan öt út nyílik. Az egyik egy három perces út végén a szabadba vezet. A többi négy közül kettő út esetén öt, másik kettő esetén pedig hét percnyi séta után visszatér ugyanebbe a terembe. A bányász teljesen össze van zavarodva, minden alkalommal a többi választásától függetlenül egyenlő valószínűséggel választ egyet az utak közül. Legyen X a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi X várható értéke?

67.) Egy szabályos kockát addig dobálunk, amíg a 6 és 5 számot nem kapjuk két egymás utáni dobás eredményeként. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét!

68.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FF sorozat megjelenik. Átlagosan mennyit (hány dobásnyit) kell erre várnunk?

69.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FFI vagy az FIF sorozat megjelenik. Mennyi a valószínűsége, hogy FFI jön előbb? Mennyit dobunk átlagosan?

SZ15.) Egy kockával addig dobunk, amíg valamelyik korábban dobott szám ismételten előfordul. Határozd meg a szükséges dobásszám várható értékét! (1p)

SZ16.) Egy érmével addig dobunk, amíg k hosszúságú fejsorozat vagy s hosszúságú írássorozat nem adódik. Mennyit dobunk átlagosan? (2p)

70.) Az Y és X valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$X\backslash Y$	1	2	3	X peremeloszlása
5	$\frac{1}{10}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
10	$\dots$	$\frac{2}{10}$	$\dots$	$\dots$
Y peremeloszlása	$\dots$	$\dots$	$\frac{4}{10}$	$\dots$

a.) Töltsd ki a táblázatot, ha $EX = 7$ és $EY = \frac{11}{5}$!

b.) X és Y függetlenek egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!

c.) Add meg $(X, Y)^T$ valószínűségi vektorváltozó kovariancia mátrixát és korrelációs mátrixát!

d.) $P(X < 7 \,|\, Y < 3) =?$

e.) $E(Y \,|\, X = 10) =?$

71.) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	
2	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	
X peremeloszlása				

Határozd meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét! Függetlenek-e egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!

72.) Legyen X és Y független, azonos eloszlású. Tegyük fel azt is, hogy véges szórásúak. $R(X, aX+bY)=?$

73.) Egy dobozban 10 piros, 10 fehér, 10 zöld, 10 kék cédula van, mindegyik 1-től 10-ig számozva. Visszatevéssel húzunk kétszer. Legyen X a pirosak száma a kihúzottak között; Y a kékek száma; Z a 10-esek száma. Határozd meg

a.) X és Y;

b.) X és Z

együttes eloszlását és korrelációját!

74.) Egy szabályos kockával dobunk. Jelölje X a dobott számot, Y pedig azt, hogy a dobott szám hárommal osztva milyen maradékot ad. $R(X,Y)=?$

75.) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen X értéke 1, ha az első dobás fej, és 0, ha írás. Legyen Y értéke 1, ha a második dobás fej, és 0, ha írás. Mutassuk meg, hogy $X+Y$ és $|X-Y|$ korrelálatlanok, de nem függetlenek!

76.) Egy dobozban 5 piros és 5 kék golyó van, amiből 100-szor húzunk visszatevéssel. Jelölje X az első 50, Y az első 75, Z pedig az utolsó 30 húzásból a pirosak számát. Határozzuk meg $X+Z$ és Y korrelációs együtthatóját!

77.) 100-szor húzunk visszatevéssel egy olyan dobozból, amelyben 1 piros és 2 fehér golyó van. X jelentse a kihúzott piros golyók számát az első 50, Y pedig az első 20 kísérletben. $R(X,Y)=?$

78.) Egy kockát 10-szer feldobunk. X a dobott 6-osok száma, Y a dobott páratlan számok száma. Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját!

79.) Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a megállások számának várható értéke és szórása?

80.) Mely c valós paraméter esetén lesznek kétdimenziós sűrűségfüggvények az alábbiak? Adjuk meg az együttes eloszlásfüggvényt, valamint a peremsűrűségfüggvényeket! $P\left(X > \frac{1}{2},\ Y < 1\right)=?$ Független X és Y? $R(X,Y)=?$

a.) $f(x,y)=\begin{cases} cxy & \text{ha } (x,y)\in(0,1)^2 \\ 0 & \text{különben}\end{cases}$

b.) $f(x,y)=\begin{cases} c(x+y) & \text{ha } x\in(0,2)^2 \\ 0 & \text{különben}\end{cases}$

c.) $f(x,y)=ce^{-\frac{x^2+4y^2}{2}},\quad (x;y)\in\mathbb{R}^2$

d.) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{2}e^{-y} & 1<x<c \text{ és } 0<y \\ 0 & \text{különben}\end{cases}$

SZ17.) Legyen (X,Y) diszkrét valószínűségi vektorváltozó, mely 3 értéket vesz fel azonos valószínűséggel: $(-1;0,5),(0;1),(1;1,5)$. $R(X,Y)=?$ Meglepő-e az eredmény és miért? (1p)

SZ18.) Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlásúak, $R(X_i,X_j)=r\ \ \forall i\neq j$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $r\geq 0$! (2p)

81.) Megadható-e olyan 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változó, amelyre $P(|X|\geq 2)\geq 0,5$?

82.) U és V valószínűségi változókról a következőket tudjuk: $R(U,V)=-0,75$; $EU=4$; $EV=6$; $D(U)=D(V)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Becsüld alulról a $P(7<U+V<12)$ valószínűséget!

83.) Hamis érmével dobunk, a fej valószínűsége 0,51.

a.) Becsüljük meg a Csebisev-egyenlőtlenséggel, majd a centrális határértéktétel segítségével is annak a valószínűségét, hogy 10 ezer dobásból legalább 5150 fej!

b.) Hányszor kell dobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 97,5 %-os valószínűséggel több legyen, mint 0,505?

84.) Egy életbiztosító társaságnak 10000 biztosítottja van, tegyük fel, hogy ők egyforma korúak és egészségűek. 1% annak a valószínűsége, hogy egy ilyen személy az év folyamán meghal. Minden biztosított az év elején 11 ezer Ft-ot fizet be, halála esetén pedig hozzátartozói 1 millió Ft-ot kapnak a biztosítótól. Mi a valószínűsége, hogy a biztosító egy évben ezen biztosításra vonatkozóan nem lesz veszteséges?

85.) Legalább hány embert kell megkérdezni egy közvéleménykutatásnál, ha egy adott párt támogatottságát (az eltérést a várható támogatottságtól) legalább 95%-os valószínűséggel 0,01–nél kisebb eltéréssel szeretnénk megbecsülni?

a.) Számoljunk a Csebisev-egyenlőtlenséggel.

b.) Számoljunk a normális eloszlással.

86.) Egy dobókockát 720-szor feldobunk. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott 6-osok száma legalább 110, de 140-nél kisebb!

87.) Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1,0,2,2 számok. 192-szer húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 108, de 162-nél kisebb!

88.) X_i-k $(i=1,2,\ldots)$ független val. változók Hova konvergál és hogyan?

a.) $X_i \sim \mathrm{Ind}(p)$ $\qquad \frac{X_1^5+\ldots+X_n^5}{n}$

b.) X_i: az i-edik kockadobás eredménye $\qquad \frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$

c.) $X_i \sim \mathrm{Exp}(2)$ $\qquad \frac{e^{X_1}+\ldots+e^{X_n}}{n}$

89.) Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$

SZ19.) Egy szabályos kockát dobálunk. Hova tart és milyen értelemben a dobott számok mértani közepe? (1p)

SZ20.) Számítsuk ki n elem találomra választott permutációjában az m hosszú ciklusok számának eloszlását! Mihez tart ez az eloszlás $n\to\infty$ esetén? (2p)
Útmutatás: használd a Jordán-formulát!
