Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

programtervező informatikus szak

Játékszabályok

- Az órákon részt kell venni, maximum 3-szor lehet hiányozni. Aki többször hiányzik, nem kap gyakjegyet.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - · 50 pont: 1. ZH a félév közepén
  - · 50 pont: 2. ZH a félév végén
  - · x pont: szorgalmi feladatokkal
- Mindkét ZH-n minimálisan teljesíteni kell a 30 %-ot, azaz a 15 pontot.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t írsz, és maximum kettest kaphatsz.
- A ZH-kon a kiosztott táblázatokon kívül használni lehet egy A4-es lapra (akár mindkét oldalára) KÉZZEL írott "puskát".
- Osztályozás:

1	0	-	34,99
2	35	-	49,99
3	50	-	64,99
4	65	-	79,99
5	80	-	1000

Infók a gyakvezetőről

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@chello.hu`
Honlap	`www.cs.elte.hu/~vargal4`

Ajánlott irodalom

- Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok (a valószínűségszámítás részhez)
- Móri-Szeidl-Zempléni: Matematikai statisztika példatár (a statisztika részhez)

1.) Egy szabályos kockával egyszer dobunk. Írd fel az eseményteret! Határozd meg az elemi események valószínűségét!

2.) Egy arany és egy ezüst érmével dobunk, majd újra dobunk azzal/azokkal az érmével/érmékkel, amelyikkel/amelyekkel fejet kaptunk. Írjuk fel az eseményteret! Határozd meg az elemi események valószínűségét!

3.) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

4.) Legyen A,B,C három esemény. Írjuk fel annak az eseménynek a valószínűségét, hogy közülük
a.) pontosan k
b.) legfeljebb k esemény következik be ($k = 1, 2, 3$).

5.) **Mintavétel:** Adott N különböző termék, amik között van M selejtes. Veszünk n elemű mintát
a.) visszatevés nélkül;
b.) visszatevéssel.
Mennyi a valószínűsége, hogy az n termékből pontosan k selejtest sikerült kiválasztanunk, amennyiben számít a kihúzás sorrendje?

6.) Ha egy magyarkártya-csomagból visszatevés nélkül húzunk 3 lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy
a.) pontosan
b.) legalább egy piros színű lapot húzunk? És mi a helyzet visszatevéses esetben?

7.) Aritmethiában az autók rendszámai hatjegyű számok 000000 és 999999 között. Mi a valószínűsége, hogy van 6 a jegyek között?

8.) Lottóhúzás során (5-ös lottó)
a.) milyen eséllyel lesz két találatom?
b.) milyen eséllyel lesz legalább két találatom?

9.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kenóhúzás során (80-ból 20 kihúzása) legalább kétszer több a páros, mint a páratlan?

10.) n dobozba helyezünk el n darab azonos golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.
a.) Mi a valószínűsége, hogy minden urnába kerül golyó?
b.) Mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

SZ1.) Mutasd meg, hogy amennyiben $A_1, ..., A_n$ tetszőleges események, akkor $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$. (1 pont)

SZ2.) Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a.) egyformák

b.) különbözőek a párok? (1 pont)

SZ3.) Egy sakktáblára 6 bástyát és 2 gyalogot véletlenszerűen elhelyezünk. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy egyik se üti a másikat! (2 pont)

11.) Egy 32 tagú osztályban a diákok angolt, németet vagy franciát tanulhatnak. Tudjuk, hogy angolul 20-an tanulnak, németül 12-en, franciául pedig 9-en. Angolul és németül egyszerre 5-en, németül és franciául egyszerre 3-an, angolul és franciául 2-en, és senki nem tanulja mind a három nyelvet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott tanuló legalább az egyik idegen nyelvet tanulja?

12.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

13.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

14.) Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?

15.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 kockával kétszer dobva, mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, ha

a.) a kockák megkülönböztethetőek?

b.) a kockák nem különböztethetőek meg?

16.) 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

17.) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és $1/3$ a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozd meg p értékét, ha $3/5$ annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!

18.) Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi $2{\cdot}2$, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

19.) Milyen $n>1$-re lesz független

a.) az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van.

b.) az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej.

20.) Osztozkodási probléma: hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 2:1 állásnál félbeszakadt a 4 győzelemig tartó mérkőzésük? (Tfh. az egyes játékok egymástól függetlenek, bármelyikük $1/2$ valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál.)

SZ4.) A 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul? (1 pont)

SZ5.) A gólyabálon 400 hallgató vesz részt. Megérkezéskor mindenki leadja a kabátját a ruhatárba: kapnak egy cédulát, ami egy számot tartalmaz. A ruhatáros néninek pedig a cédulának megfelelő fogas helyére kellene vinni a ruhát. Egy bökkenő van: a néni nem tud olvasni, ezért véletlenszerűen felakasztgatja a kabátokat (a hallgatóknak ez nem tűnik fel). A bál végén mindenki odamegy a ruhatárhoz a ruhájáért. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy senki se a saját kabátját kapja! (3 pont)

SZ6.) Egy urnában K fehér és M fekete golyó van. Visszatevés nélkül kihúztunk n golyót, s ebből k lett fehér és $n-k$ fekete. Mi a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye fehér golyó volt, ha a golyók számozottak? (2 pont)

SZ7.) Cilike és Dani pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, $1/4$ valószínűséggel Cilike, $3/4$ valószínűséggel Dani nyer meg. A jelenlegi állás 19:18 Cilike javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Dani nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 21 pontot szerezni.) (2 pont)

21.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

22.) Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy egy lottóhúzásnál (90/5) a legnagyobb kihúzott szám k. Számítsd ki a p_k értékeket, és mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

23.) Legyenek A, B, C, D, egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra érünk vissza először A-ba. Írjuk fel X eloszlását! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

24.) Egy tétova hangya a számegyenesen bolyong. 0-ból indul és minden lépésnél egyforma valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lép. Mennyi a valószínűsége, hogy 2n lépés után a hangya k-ban lesz?

25.) Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

SZ8.) Legyenek az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáró események, melyek a P(A_1)=p_1, P(A_2)=p_2 és P(A_3)=p_3 valószínűségekkel következnek be. Mennyi a valószínűsége, hogy n független kísérletet végezve, a kísérletek során az A_2 előbb következik be, mint az A_1 vagy az A_3? Számítsuk ki e valószínűség határértékékét, ha a kísérletek száma a végtelenhez tart! (2 pont)

SZ9.) Hányszor kell két kockát feldobnunk, hogy 0,99-nél nagyobb valószínűséggel legalább egyszer két hatost dobjunk? (1 pont)

26.) Számítsuk ki a kockadobás várható értékét, ha

a.) a kocka szabályos;

b.) a kocka szabálytalan: két 1-es, három 4-es, egy 6-os van rajta.

27.) Hány dobókocka esetén a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kockákat egyszerre feldobva, a kapott számok között pontosan egy hatos van?

28.) Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 100 000Ft-os, és 100 db 1 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

29.) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét.

30.) Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

31.) Dobjunk egy kockával annyiszor, ahány fejet dobtunk két szabályos érmével. Jelölje X a kapott számok összegét. Adjuk meg X eloszlását.

32.) Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy egy évben legfeljebb egy ember lesz így öngyilkos?

33.) Egy 200 oldalas könyvben 20 sajtóliba található véletlenszerűen elszórva.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 100. oldalon több, mint egy ajtóhiba van?

b.) Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 100. oldalon?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két hajtóhiba van?

34.)

a.) Legyen X egy szabálytalan érmével (p a fej valószínűsége) végzett dobássorozatnál az első, azonosakból álló sorozat hossza. (Ha pl. a dobássorozat FIIIF... akkor X=1.) Számítsuk ki X várható értékét.

b.) Legyen Y egy szabálytalan érmével (p a fej valószínűsége) végzett dobássorozatnál a második, azonosakból álló sorozat hossza. (Ha pl. a dobássorozat FIIIF... akkor Y=3.) Számítsuk ki Y várható értékét.

35.) Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét!

36.) 5-ször dobunk egy szabályos kockával. Legyen X a 6-osok száma. D^2(X)=?

37.) Adjuk meg az { 1,2,...,N} számokon egyenletes eloszlás szórásnégyzetét.

38.) Egy osztályban a diákok magassága: (cm)

180	163	150
157	165	165
174	191	172
165	168	186

Elemezd a diákok testmagasságát az átlag, a korrigált tapasztalati szórás, szórási együttható és boxplot ábra (kvartilisek) segítségével! Értelmezd is az eredményeket!

SZ10.) Egy szabálytalan érmét addig dobálunk, amíg fejet nem kapunk. Annak a valószínűsége, hogy páros sokszor kell dobnunk, harmad akkora, mint annak, hogy páratlan sokszor. Mekkora a fejdobás valószínűsége? (2 pont)

SZ11.) Legyen X diszkrét valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei: (k=1,2,...)

a.) $x_k = \frac{q^{-k}}{k^2}$;

b.) $x_k = \frac{q^{-k}}{k!}$;

c.) $x_k = \frac{(-1)^k q^{-k}}{k}$.

Az ezeknek megfelelő valószínűségek: $p_k = 8q^k$.

Határozd meg q értékét, majd mindhárom esetben X várható értékét! (2 pont)

SZ12.) Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó, amiről ismertek: EX=8, DX=2. Határozd meg a P(X<16) valószínűséget! (1 pont)

39.) Mely c-re lesz eloszlásfüggvény $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ cx^3 & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$

P(-1<X<1)=? Határozd meg a sűrűségfüggvényét!

40.) Eloszlásfüggvények-e a következő függvények? Ha igen, van-e sűrűségfüggvényük?

a.) $F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^a & \text{ha } x > c \quad (a, c > 0) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

b.) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{[x]}{2} & 0 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$

ahol [x]: x egészrésze

41.) Mely c-re lesz eloszlásfüggvény $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ cx^3 & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$?

$P(-1 < X < 1) =$? Mely c-re létezik sűrűségfüggvény? Határozd meg!

42.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő:

$f(x) = \begin{cases} cx^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

a.) Határozd meg a c értékét és X eloszlásfüggvényét!

b.) $P(X < -0.5) =$? $P(X < 0.5) =$? $P(X < 1.5) =$?

c.) $D^2(X) =$?

43.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

a.) $c =$?, $F(x) =$?

b.) $P(X < 2) =$?, $P(X > 3) =$?

c.) $E(X) =$?

d.) $D^2(X) =$?

44.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő:

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } 2 < x < c \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

a.) $c =$? $F(x) =$?

b.) $E(X) =$? $D(X) =$?

45.) Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét.

SZ13.) Az A és B állandók mely értékére lehet az F(x)=A+Barctgx (-∞<x<∞) eloszlásfüggvény? (1 pont)

SZ14.) Egy egyszerű csapadék-modell lehet a következő: annak az esélye, hogy egy adott napon nem lesz csapadék, 0.6. Ha van csapadék, akkor a mennyisége exponenciális eloszlású, λ=2 paraméterrel. Adjuk meg a csapadékmennyiség eloszlásfüggvényét. Mi a valószínűsége, hogy legalább 1 mm csapadék lesz? Abszolút folytonos-e az eloszlás? (2 pont)

SZ15.) Határozd meg (sejtsd meg) ÉS bizonyítsd be (pl. teljes indukcióval) az exponenciális eloszlás tetszőleges momentumát! (E(X^i)=?) (2 pont)

46.) Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

47.) Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

48.) Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

49.) Legyen az X valószínűségi változó. Határozd meg $-log(X)$ sűrűségfüggvényét, ha X

a.) exponenciális eloszlású;

b.) egyenletes eloszlású az (a,b) intervallumon.

50.) Legyen X standard normális eloszlású. Adjuk meg

a.) $Y = \sigma X + m$;

b.) $Y = e^X$;

c.) $Y = X^2$.

sűrűségfüggvényét és várható értékét. $P(Y < 1) =$?

51.) Legyen $X \sim E(-1, 1)$ és $Y = 2^X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

SZ16.) Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk két pontot, így a szakaszt rövidebb szakaszokra bontjuk. Jelölje X a kapott szakaszok közül a középső hosszúságút. Írd fel X eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, valamint számítsd ki X várható értékét! (2 pont)

SZ17.) Egy egységnégyzetből válasszunk ki egy tetszőleges pontot, jelölje X és Y a kiválasztott pont két koordinátáját. Határozd meg $Z = X - Y$ eloszlás-, sűrűségfüggvényét és várható értékét! (3 pont)

SZ18.) Legyen X exponenciális eloszlású λ=1 paraméterrel.
Adjuk meg $Y = 1 - e^{-X}$ sűrűségfüggvényét és várható értékét. (1 pont)

52.) Határozzuk meg X és Y konvolúcióját, amennyiben ezek független

a.) Ind(p);

b.) Bin(n, p);

c.) Geo(p);

d.) N(0,1);

e.) Poi(λ)

eloszlásúak!

53.) Mely c-re lesznek kétdimenziós sűrűségfüggvények az alábbiak? Adjuk meg az együttes eloszlásfüggvényt, valamint a peremsűrűségfüggvényeket. $R(X, Y) =$?

a.) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{ha } (x, y) \in (0, 1)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

b.) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{ha } x \in (0, 2)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

54.) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$Y \backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	
2	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	
X peremeloszlása				

Határozd meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét! Függetlenek-e egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!

55.) Egy 52 lapos francia kártyacsomagból húzunk 2 lapot visszatevés nélkül. Legyen X a kőrök, Y pedig az ászok száma. Adjuk meg X és Y korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e ezek a változók?

56.) Legyen X és Y független, azonos eloszlású. Tegyük fel azt is, hogy véges szórásúak. $R(X, aX + bY) =$?

SZ19.) Egy tányéron 8 diós és 4 mákos sütemény van. A diósak közül kettőnek, a mákosak közül háromnak égett az alja. Addig húzunk a tányérról visszatevés nélkül, amíg diósat vagy égett aljút nem húzunk.

a.) Legyen X a kihúzott égett aljú sütemények száma, Y pedig a kihúzott mákos sütemények száma. Add meg X és Y együttes eloszlását és a peremeloszlásokat (foglald táblázatba)!

b.) $R(X, Y) =$? (2+1 pont)

SZ20.) Legyen (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{2}e^{-y} & \text{ha } 1 < x < a \text{ és } 0 < y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

$a =$?

$E((X + 1)(Y - 1)) =$? (1 pont)

SZ21.) Legyen (X, Y) diszkrét valószínűségi vektorváltozó, mely 3 értéket vesz fel azonos valószínűséggel: $(-1; 0,5), (0; 1), (1; 1,5)$.
R(X, Y)=? Meglepő-e az eredmény és miért? (1 pont)

SZ22.) Legyen (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+9y^2}{2}}$, ahol $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$P(X < 0, Y < 3) =$?

$R(X, Y) =$? (1 pont)

57.) Legyen $X_1, ..., X_n$ független, azonos abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók sorozata.

Adjuk meg $\min(X_1, ..., X_n)$, illetve $\max(X_1, ..., X_n)$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét! A minimumnál külön is vizsgáljuk meg azt az esetet, ha az X_i változók exponenciális eloszlásúak!

58.) Adjunk torzítatlan becslést a val.szám. vizsga bukási arányára, ha 300-ból 100-an buktak meg. Mekkora a becslésünk szórása? (Adjunk rá felső becslést.)

59.) Legyen $X_1, ..., X_n$ i.i.d. minta ismeretlen eloszlásból.

a.) Torzítatlan becslés-e a várható értékre nézve az átlag?

b.) Torzítatlan becslés-e a szórásnégyzetre nézve a tapasztalati szórásnégyzet?

Amennyiben nem az, hogyan tudnánk torzítatlanná tenni?

60.) n elemű λ-paraméterű exponenciális minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-3\lambda}$-ra és $\frac{1}{\lambda}$-ra!

61.) n elemű λ-paraméterű Poisson minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-\lambda}$-ra és λ^2-re!

62.) Adjunk meg torzítatlan becslést a $[0, \theta]$ intervallumon egyenletes eloszlás paraméterére

a.) a mintaátlag

b.) a maximum

segítségével. Számoljuk ki a becslések szórását is.

63.) Mutassuk meg, hogy exponenciális eloszlású minta esetén $T(\mathbf{X}) = n \cdot \min(X_1, ..., X_n)$ statisztika torzítatlan a várható értékre. Mekkora a szórása?

64.) Tegyük fel, hogy a val.szám jegyekre vonatkozó eddigi 3 megfigyelésünk: 2,3,5.

a.) Adj torzítatlan becslést a 3 megfigyelés alapján a szórásnégyzetre!

b.) A negyedik megfigyelés mely értékére lesz a korrigált tapasztalati szórásnégyzet a legnagyobb, illetve a legkisebb?

65.) Legyen $X_1, ..., X_n$ i.i.d. minta valamely véges szórású eloszlásból, és tekintsük a $\mathrm{T}(\mathbf{X}) = a_1X_1 + ... + a_nX_n$ alakú lineáris becsléseket, ahol $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Feltéve, hogy $\mathrm{T}(\mathbf{X})$ a várható érték torzítatlan becslése, mely $a_1, ..., a_n$ számokra lesz minimális a $D^2(T(\mathbf{X}))$?

SZ23.) 5 véletlen számot jegyeztünk fel: 100,32,76,52,17. Ha tudjuk, hogy ezek az {1,2,...,N} halmazból vett véletlen minta elemei, akkor hogyan becsülnénk az N paramétert? (1 pont)

SZ24.) Piroska kigondolt valahány számot, a farkas pedig kiszámította a tapasztalati szórásnégyzetüket: 15,84 ; valamint a korrigált tapasztalati szórásnégyzetüket: 19,8 . Hány számra gondolt Piroska? (1 pont)

SZ25.) Adjunk torzítatlan becslést a $[0,\theta]$ intervallumon egyenletes eloszlás paraméterére a minimum segítségével. Számoljuk ki a becslés szórását is. (2 pont)

SZ26.) Legyen $X_1, ..., X_n$ i.i.d. minta Bin(k,p)-ből, $Y_1, ..., Y_n$ i.i.d. minta Bin(l,p)-ből, és tegyük fel, hogy a két minta egymástól is független. Milyen (a, b) számpárokra lesz $a\overline{X} + b\overline{Y}$ a p paraméter torzítatlan becslése? Ezen számpárok közül melyikre lesz a becslés szórása minimális? (3 pont)

66.) Határozzuk meg az ismeretlen paraméter(ek) ML becslését, ha a minta

a.) Pascal (=Geom(p));

b.) Bin(m, p), ahol m ismert, p paraméter;

c.) E(a, b) eloszlású, ahol $a < b$, mindkettő paraméter;

d.) Exp(λ);

e.) Poi(λ).

67.) Tegyük fel, hogy a minta kétparaméteres eloszláscsaládból származik, a paraméterek a és b.

Ekkor mutassuk meg, hogy az $\begin{cases} E_{a,b}X &= m_1 \\ E_{a,b}X^2 &= m_2 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása megegyezik az $\begin{cases} E_{a,b}X &= m_1 \\ D^2_{a,b}X &= s_n^2 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásával.

68.) Becsüld a paramétert momentum-módszerrel az alábbi esetekben:

a.) Exp(λ);

b.) Poi(λ);

c.) E(a, b);

d.) E($-a, a$).

69.) Adjunk külöböző becsléseket az alábbi, éves maximum vízállások alapján az eloszlás 99 %-os kvantilisére

a.) tapasztalati eloszlásból;

b.) normális közelítésből;

c.) 500+Y-ból, ahol Y exponenciális.

1991	690	1996	586
1992	709	1997	546
1993	876	1998	923
1994	544	1999	830
1995	843	2000	873

70.) Legyen az $X_1, \ldots, X_n$ minta a következő diszkrét eloszlásból: P(X_1=1)=c, P(X_1=2)=3c, P(X_1=3)=1-4c (c az ismeretlen paraméter). Tegyük fel, hogy az n mintaelemből y_i darab veszi fel az i értéket (i=1,2,3).

a.) Határozzuk meg c momentum-becslését!

b.) Határozzuk meg c ML-becslését!

71.) Legyen a $Z_1, \ldots, Z_5$ minta N$(m, 2^2)$ eloszlású. A megfigyelt értékek a következők: 6; 4,5; 2,5; 2; 1.

a.) Határozzunk meg 95%-os (99%-os) megbízhatóságú konfidenciaintervallumot m-re!

b.) Hány elemű mintára van szükségünk 95%-os megbízhatósági szinten, ha azt szeretnénk, hogy a konfidenciaintervallum legfeljebb 0,01 hosszúságú legyen?

c.) Mi változik az a.) esetben, ha a szórást nem ismerjük?

d.) Adjunk a szórásra 98%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot.

$\chi^2_{4;0,01} = 0,3 \; \chi^2_{4;0,99} = 13,28$

72.) Egy közvéleménykutatás során 1000 embert kérdeztek meg. Közülük 88-an szavaznának a FUMI pártra. Adjunk 96%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot a FUMI párt tényleges szavazataarányára! Alkalmazzunk normális eloszlással való közelítést.

SZ27.) Határozzuk meg az ismeretlen paraméterek ML becslését, ha a minta N(μ, σ^2), ahol μ valós és σ>0, mindketten paraméterek. (1 pont)

73.) Legyen X a hatosok száma 6 kockadobásból, Y pedig $X + Z$, ahol Z további 6 kockadobásból a hatosok száma. Mi lesz Y legkisebb négyzetes közelítése X segítségével, ha

a.) X lineáris függvényével közelítünk;

b.) X tetszőleges függvényével közelítünk?

74.) Legyenek adottak a következő (x,y) párok:

x_i	0	1	6	5	3
y_i	4	3	0	1	2

a.) Határozzuk meg és ábrázoljuk is az $aX + b$ alakú regessziós egyenest.

b.) Számoljuk ki a reziduálisokat és becsüljük meg a hiba-szórásnégyzetet.

c.) Adjunk előrejelzést x=10-re a regressziós egyenes alapján.

75.) Véletlenszerűen választunk egy szót az alábbi mondatból: EGY TEVE LEGEL A KERTBEN. A feladatunk az, hogy kitaláljuk a szó hosszát úgy, hogy a tényleges és a tippelt szóhossz közötti eltérés négyzetének várható értéke minimális legyen.

a.) Mit tippelünk, ha semmi információ nem áll rendelkezésünkre?

b.) Hogyan tippelünk, ha valaki megsúgta a szóban szereplő "e"-betűk számát?

c.) Hogyan tippeljünk, ha az "e" betűk számának lineáris függvényét használhatjuk?

76.) U és V valószínűségi változókról a következőket tudjuk: R(U, V)=-0,75; EU=4; EV=6; D(U)=D(V)=$\frac{1}{\sqrt{2}}$. Becsüld alulról a P($8 < U + V < 12$) valószínűséget!

77.) Legalább hány embert kell megkérdezni egy közvéleménykutatásnál, ha egy adott párt támogatottságát (az eltérést a várható támogatottságtól) legalább 95%-os valószínűséggel 0,01–nél kisebb eltéréssel szeretnénk megbecsülni?

a.) Számoljunk a Csebisev-egyenlőtlenséggel.

b.) Számoljunk a normális eloszlással.

78.) Hamis érmével dobunk. 0,51 a fej valószínűsége.

a.) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 ezer dobásból legalább 5150 fej!

b.) Hányszor kell dobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 97,5 %-os valószínűséggel több legyen, mint 0,505?

79.)

a.) Legyenek X_i $\sim$Ind(p) (i=1,2,...) val. változók. Mihez konvergál $\frac{X_1^5+\ldots+X_n^5}{n}$?

b.) X_i jelölje az i-edik kockadobás eredményét. Mihez konvergál $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$?

80.) Legyen X_n n paraméterű Poisson eloszlású. Mihez tart $n \to \infty$ esetén

a.) P$(X_n < n)$;

b.) P$(X_n < n - n^{1/2})$?

SZ28.) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen U az első dobás eredménye, V a második dobás eredménye, és $X = U + V$, valamint $Y = U - V$. Hogyan közelítsük Y-t X segítségével, ha

a.) csak lineáris függvényt használhatunk;

b.) tetszőleges függvényt alkalmazhatunk? (2 pont)

81.) Valaki azt állítja, hogy a klíma változik, és ezt azzal véli bizonyítottnak, hogy az elmúlt 10 évben 2-szer is volt jégeső, pedig korábban az egyes évekre a jégeső valószínűsége a hivatalos adatok alapján csupán p=0.1 volt. Írjuk fel a hipotéziseket, a próbát és állapítsuk meg az elsőfajú hiba valószínűségét, valamint az erőfüggvényt a p=0.2 pontban!

82.) Az alábbi minta 4 év október 18-án Budapesten mért napi középhőmérséklet adatait tartalmazza. Ellenőrizzük a H_0: m =15 hipotézist α =0.05 elsőfajú hibavalószínűség mellett *értelmes* alternatív hipotézissel szemben. Középhőm. (C fok) adatok:

14,8	12,2	16,8	11,1

a.) A korábbi tapasztalatok alapján tekintsük az értékek szórását 2-nek. Adjuk meg a p-értéket is.

b.) Ne használjunk a szórásra vonatkozóan előzetes információt.

83.) A Dezinformatikai Kar III. évfolyamán 10-en írtak statisztika zárthelyit. 2 feladatsor volt, mindkettőben 30 pontot lehetett elérni. Tegyük fel, hogy az elért pontszámok normális eloszlásúak. A pontszámokat tartalmazza az alábbi táblázat:

1. feladatsor	12	11	8	14	10
2. feladatsor	15	14	9	16	11

a.) Vajon az első feladatsor nehezebb volt?

b.) Mennyiben változik a helyzet, ha nem 10 diákról, hanem csak 5-ről van szó, és a 2. feladatsor a pótZH eredménye?

84.) Az alábbi két minta 10 egyforma képességűnek feltételezett sportoló súlylökésben elért eredményeit tartalmazza. A sportolók két ötfős csoportban készültek az edzőtáborban. Edzéstervük ugyanaz volt, de az első csoportban készülők minden reggel fejenként 10 tojást és 25 túró rudit ettek meg. A második csoportban készülőknek reggel és este 1-1 kg szalonnát és 1-1 kg madártejet kellett megenni. 2 hét felkészülés után értékelték az eredményeket. Tételezzük fel, hogy normális eloszlásból származnak a minták és a terjedelem 5%.

1. csoport	15,8	15,2	16,3	17,1	16,1
2. csoport	19,0	12,1	17,2	14,7	21,0

a.) Melyik diéta volt jobb, ha a dobások szórását 2-nek tekintjük?

b.) Állíthatjuk-e, hogy a második csoportban nagyobb változékonyságot mutat a sportolók teljesítménye?

c.) Ha nem ismerjük a szórást, akkor tekinthetjük-e valamelyik diétát jobbnak?

$F_{4,4}^{0,95} = 4,4$ $F_{5,5}^{0,95} = 5,05$ $F_{4,4}^{0,975} = 9,6$ $F_{5,5}^{0,975} = 7,15$

85.) Az Informatikai Kar III. évfolyamán 300-an tanulnak. Megszámolták, hogy a legutóbbi vizsgaidőszakban hányszor buktak az egyes hallgatók. Az eredményeket tartalmazza az alábbi táblázat.

Bukások száma	0	1	2	3	4
Hallgatók száma	80	113	77	27	3

a.) Elfogadhatjuk-e azt a hipotézist, hogy egy hallgató bukásszáma Bin(4; 0,25) eloszlású?

b.) és azt, hogy Bin(4;p) eloszlású?

86.) Az alábbi kontingencia-tábláztat mutatja, hogy 100 évben a csapadék mennyisége és az átlaghőmérséklet hogyan alakult.

Csapadék / Hőmérséklet	Kevés	Átlagos	Sok
Hűvös	15	10	5
Átlagos	10	10	20
Meleg	5	20	5

(A cellákban az egyes esetek gyakoriságai találhatóak.) Tekinthető-e a csapadékmennyiség és a hőmérséklet függetlennek?