Valószínűségszámítás gyakorlat
Matematikatanári szak

Játékszabályok

- Max 3-szor lehet hiányozni. Aki többször hiányzik, nem kap aláírást.
- 100 + x pontot lehet szerezni a félév során:
  - 50 pont: 1. ZH a félév közepén
  - 50 pont: 2. ZH a félév végén
  - x pont: szorgalmi feladatokkal
- Mindkét ZH-n minimálisan teljesíteni kell a 30 %-ot, azaz a 15 pontot.
- Ha egy ZH sikertelen, nem írod meg, vagy javítani szeretnél, akkor vizsgaidőszak első hetén lesz lehetőség a pótZH megírására vagy a javításra. Csak az egyik ZH anyagából javíthatsz, és a jobbik eredményt veszem figyelembe, azaz nem lehet rontani. Két sikertelen vagy meg nem írt ZH esetén gyakUV-t írsz, és maximum kettest kaphatsz.
- A ZH-kon használhatók: számológép ($\neq$ mobiltelefon) és egy "hivatalos puska", azaz egy legfeljebb A4-es méretű lapra **kézzel** írott jegyzet.
- Osztályozás:

1	0	-	34,9	3,5	57,5	-	64,9
2	35	-	42,4	4	65	-	72,4
2,5	42,5	-	49,9	4,5	72,5	-	79,9
3	50	-	57,4	5	80	-	1000

  A ZH-k alapján kapott jegy beleszámít a vizsgajegybe. Aki mesterképzésre jár, rendes gyakorlati jegyet kap, az ő jegyét egészre kerekítem lefelé.

Infók a gyakorlatvezetőről

Név	Varga László
Tanszék	Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék (ELTE TTK)
Szoba	D 3-309
E-mail	`vargal4@cs.elte.hu`
Honlap	`vargal4.elte.hu`

Ajánlott irodalom – mindegyik példatár

- Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok
- Bognárné–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Arató–Prokaj–Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet (elérhetőség: `http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/valszam/zempleni.pdf`)

1.) Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer.
a.) Mik lesznek a kísérletet leíró eseménytér pontjai?
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen 1 fejet dobunk?

2.) 2 számozott érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Mik lesznek az eseménytér elemei?

3.) Tegyük fel, hogy egy irodában 3 titkárnő dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik titkárnő megbetegszik ($i = 1, 2, 3$). Fejezzük ki az A_i események segítségével a következő események valószínűségét:
a.) az első titkárnő megbetegszik;
b.) csak az első titkárnő betegszik meg;
c.) mindhárom titkárnő megbetegszik;
d.) legalább 1 titkárnő megbetegszik;
e.) legalább 2 titkárnő megbetegszik.

4.) Igaz-e, hogy $P(A) < P(B)$ esetén $A \subset B$?

5.) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

6.) Aritmethiában az autók rendszámai ötjegyű számok 00000 és 99999 között. Ezek közül találomra választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) van 6 a jegyek között;
b.) minden számjegy különböző;
c.) minden számjegy egyforma;
d.) csak két számjegy egyezik meg;
e.) három, illetve kettő számjegy megegyezik?

7.) A német labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 20 mezőnyjátékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 10-es csoportba, hogy Schweinsteiger és Özil egymás ellen játszik?

8.) Mintavétel: Adott N különböző termék, amik között van M selejtes. Veszünk n elemű mintát
a.) visszatevés nélkül;
b.) visszatevéssel.
Mennyi a valószínűsége, hogy az n termékből pontosan k selejtest sikerült kiválasztanunk, amennyiben számít a kihúzás sorrendje?

9.) Egy magyarkártya-csomagból visszatevéssel húzunk 3 lapot.
a.) Írjuk fel az eseményteret!
b.) Milyen eséllyel húzunk pontosan egy piros színű lapot?
c.) Milyen eséllyel húzunk legalább egy piros színű lapot?

10.) Tekintsük egy lottóhúzás (5-ös lottó) eredményét.
a.) Írjuk fel az eseményteret!
b.) Milyen eséllyel lesz két találatom?
c.) Milyen eséllyel lesz legalább két találatom?

11.) $2N$ darab molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül az A vagy a B térrész valamelyikébe. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) ugyanannyi molekula lesz A-ban és B-ben;
b.) A-ban több lesz, mint B-ben;

c.) mindkettőben páros számú molekula lesz?

SZ1.) Mutasd meg, hogy amennyiben $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges események, akkor $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$. (1p)

SZ2.) Egy sakktáblára 2 bástyát és 1 királyt véletlenszerűen elhelyezünk. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy egyik se üti a másikat! (2p)

12.) Mi a valószínűsége, hogy egy találomra választott pozitív egész szám
a.) osztható 5-tel;
b.) 6-hoz viszonyítva relatív prím;
c.) négyzete 1-re végződik;
d.) köbe 11-re végződik;
e.) 10. hatványa 6-ra végződik;

13.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy héten a lottóban kihúzott öt szám közti páronkénti különbségek mindegyike legalább öt?

14.) 1987-ben a 34. heti lottóhúzáson két pár egymás utáni számot is kihúztak: a (31;32)-t és az (50;51)-et. Mi a valószínűsége, hogy egy lottóhúzás eredménye ehhez hasonlóan alakul, azaz kihúznak két szomszédos számokból álló párt, de nem húznak ki három egymás utáni számot?

15.) Egy 32 tagú osztályban a diákok angolt, németet vagy franciát tanulhatnak. Tudjuk, hogy angolul 20-an tanulnak, németül 12-en, franciául pedig 9-en. Angolul és németül egyszerre 5-en, németül és franciául egyszerre 3-an, angolul és franciául 2-en, és senki nem tanulja mind a három nyelvet.
Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott tanuló legalább az egyik idegen nyelvet tanulja?

16.) Egy hattagú társaság az étteremben három pacalpörköltet, két mátrai borzas csirkemellet, és egy böllér tálat rendel. A pincér a megrendelt ételeket véletlenszerűen osztja szét. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) mindenki azt kapja, amit rendelt;
b.) senki sem azt kapja, amit rendelt?

17.) Mennyi a valószínűsége, hogy 20 ember közül van olyan hónap, amelyikben egyikük se született?

18.) $2N$ darab molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül N darab térrész valamelyikébe. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik térrészben lesz legalább egy molekula ?

19.) Két kockával dobunk. Tekintsük a következő három eseményt:
A: dobtunk 1-est; B: az összeg 7; C: dobtunk 6-ost
Mely eseménypárok függetlenek? Igaz-e, hogy a három esemény teljesen független?

20.) Milyen $n>1$-re lesz független
a.) az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van.
b.) az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej.

21.) Osztozkodási probléma, 1494. Hogyan osztozzon az 1600 forintos téten két játékos, ha 2:1-es állásnál félbeszakadt a k győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy az egyes játékok egymástól függetlenek, az első játékos p valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál. Oldjuk meg a feladatot a következő esetekben:
a.) $k = 3$; $p = 1/4$
b.) $k = 4$; $p = 1/2$

SZ3.) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy 2^n, ahol n találomra választott pozitív egész szám, az 1 számjeggyel kezdődik! (2p)

SZ4.) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy két tetszőlegesen választott pozitív egész szám relatív prím! (3p)

22.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

23.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

24.) Négyen lőnek egymás után egy céltáblára. A résztvevők találati valószínűségei egymástól függetlenül, sorrendben $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$. Ketten érnek el találatot. Mi a valószínűsége, hogy a második hibázta el a lövést?

25.) Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?

26.) 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

27.) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és 1/3 a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozd meg p értékét, ha 3/5 annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!

28.) Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2·2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

29.) Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány hatost dobott egymás után egy dobókockával. Például ha elsőre hatost, másodikra kettest dob, akkor egyszer lőhet. Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha minden lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?

SZ5.) Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy egy családban pontosan n gyerek van, $n = 0, 1, \ldots$ és legyen $p_n := \alpha\rho^n$, $n \geq 1$-re, és $p_0 = 1 - \alpha\rho(1 + \rho + \rho^2 + \ldots)$, ahol $\rho \in (0, 1)$ és $\alpha > 0$ úgy vannak megválasztva, hogy $\alpha\rho < 1 - \rho$. Tegyük fel, hogy amennyiben egy családban n gyerek van, akkor azok nemenkénti eloszlása egyenletes (a 2^n lehetőség között). Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$-re annak a valószínűsége, hogy egy családban pontosan k fiú van, $\frac{2\alpha\rho^k}{(2-\rho)^{k+1}}$! (1p)

SZ6.) Egy dobozban cédulák vannak, melyekre a 2, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 9 számokat írtuk fel (minden cédulán 1 szám található). Marcsi visszatevés nélkül kihúz két cédulát. Annyit árult el, hogy a céduláin lévő számok párosak. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy kihúzta a 4-est! (2p)

30.) Egy érmével 2-szer dobunk. Ha 2 fej jött ki, akkor még 2-szer, különben még egyszer dobunk. Legyen X a fejek száma. Határozzuk meg X eloszlását!

31.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

32.) Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy egy lottóhúzásnál (90/5) a legnagyobb kihúzott szám k. Számítsd ki a p_k értékeket, és mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

33.) Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy egy évben legfeljebb egy ember lesz így öngyilkos?

34.) Egy sportlövő p valószínűséggel talál el egy léggömböt.
a.) Az első;
b.) az ötödik találatig lő.
Mi lövései számának eloszlása?

35.) Egy n, egymástól függetlenül működő alkatrészekből álló rendszert figyelünk meg egymás utáni időperiódusokban. Az egyes alkatrészek egymástól függetlenül p valószínűséggel működnek. Fennakadás van a rendszerben, ha legalább k alkatrész nem működik. Mennyi a valószínűsége, hogy először az m-edik periódusban lesz fennakadás?

36.) Milyen eloszlásúak:
a.) azon hetek száma, ameddig hetente egy szelvényt kitöltve, egymást követően 0 találatunk van a lottón;
b.) két kockadobás minimuma?

37.) Határozd meg a binomiális eloszlás maximális tagját!

38.) Egy 200 oldalas könyvben 20 sajtóliba található véletlenszerűen elszórva.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 100. oldalon több, mint egy ajtóhiba van?
b.) Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 100. oldalon?
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két hajtóhiba van?

SZ7.) Határozd meg a Poisson-eloszlás maximális és minimális tagját! (1p)

SZ8.) Egy szövegben a sajtóhibák száma t paraméterű Poisson-eloszlású. Egy javító a hibákat egymástól függetlenül p valószínűséggel kijavítja, illetve $1 - p$ valószínűséggel nem veszi észre őket. Határozzuk meg a megmaradó hibák számának eloszlását! (2p)

SZ9.) Addig dobunk két kockával, amíg kétszer elő nem fordul az, hogy a két kockán lévő számjegyek összege 11. Számold ki annak a valószínűsége, hogy pontosan tízszer dobunk 11-nél kisebb összeget, mielőtt a keresett esemény bekövetkezik? (3p)

39.) Számítsuk ki a kockadobás várható értékét és szórását, ha
a.) a kocka szabályos;
b.) a kocka szabálytalan: két 1-es, három 4-es, egy 6-os van rajta.

40.) Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 db 100 000 Ft-os, és 100 db 1000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

41.) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét és szórását!

42.) Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

43.) 5-ször dobunk egy kockával. Legyen X a 6-osok száma. $D(X) =?$

44.) Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó, amiről ismertek: $EX = 8$, $DX = 2$. Határozd meg a $P(X < 16)$ valószínűséget!

45.) Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét!

46.) Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a megállások számának várható értéke?

47.) Átlagosan hányat kell dobnunk
a.) egy érmével, amíg fej és írás is lesz a dobások között?
b.) egy kockával, amíg minden szám kijön?
c.) egy kockával, amíg minden páros szám kijön?

SZ10.) Egy hamis érmét addig dobálunk, amíg fejet nem kapunk. Annak a valószínűsége, hogy páros sokszor kell dobnunk, harmad akkora, mint annak, hogy páratlan sokszor. Mekkora a fejdobás valószínűsége? (1p)

SZ11.) Legyen X diszkrét valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei: (k=1,2,...)
a.) $x_k = \frac{q^{-k}}{k^2}$;
b.) $x_k = \frac{q^{-k}}{k!}$;
c.) $x_k = \frac{(-1)^k q^{-k}}{k}$.
Az ezeknek megfelelő valószínűségek: $p_k = 8q^k$. Határozd meg q értékét, majd mindhárom esetben X várható értékét! (2p)

48.) Egy urnában 9 cédula van, 1-től 9-ig megszámozva. Addig húzunk visszatevéssel, amíg 4-nél nagyobb számot nem kapunk. Határozzuk meg a kihúzott számok összegének várható értékét!

49.) Egy dobozban 3 cédula van, rajtuk az 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ számok. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 1-est nem kapunk. Határozzuk meg a kihúzott számok szorzatának várható értékét!

50.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FF sorozat megjelenik. Átlagosan mennyit (hány dobásnyit) kell erre várnunk?

51.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FFI vagy az FIF sorozat megjelenik. Mennyi a valószínűsége, hogy FFI jön előbb? Mennyit dobunk átlagosan?

52.) Fej vagy írást játszunk egy szabályos érmével: ha fejet dobunk, megnyerjük a tétet; ha írást, elveszítjük. Amikor leülünk játszani, 1 petákunk van és az a célunk, hogy 5 petákot gyűjtsünk. Feltesszük az összes pénzünket, illetve annyit, amennyi hiányzik a célunk eléréséhez.

a.) Mekkora valószínűséggel érjük el a célunkat?
b.) Válaszoljunk a kérdésekre "óvatos stratégia" esetén is, azaz, ha minden játszmában csak 1 petákot teszünk fel!

53.) Egy szabályos kockát addig dobálunk, amíg a 6 és 5 számot nem kapjuk két egymás utáni dobás eredményeként. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét!

SZ12.) Egy kockával addig dobunk, amíg valamelyik korábban dobott szám ismételten előfordul. Határozd meg a szükséges dobásszám várható értékét! (1p)

SZ13.) Egy érmével addig dobunk, amíg k hosszúságú fejsorozat vagy s hosszúságú írássorozat nem adódik. Mennyit dobunk átlagosan? (2p)

SZ14.) Egy városban az úthálózat gráfja egy ikozaéder élhálózatának gráfjával egyezik meg. Jolán háza az ikozaéder egyik csúcsában van, munkahelye pedig az ezzel szemközti csúcsban. Sötétedés után munkahelyéről hazafelé menet minden egyes csúcsba érve elbizonytalanodik, hogy merre is haladjon tovább. Tegyük fel, hogy minden csúcsban p annak a valószínűsége, hogy találkozik valakivel, aki mutat neki egy olyan irányt, amerre elindulva a legkevesebb élen haladva a szállására juthat. Ellenkező esetben véletlenszerűen halad tovább úgy, hogy egyik irány sincs kitüntetve, vagyis előfordulhat akár az is, hogy visszafordul. Mekkora p érték esetén lesz 50% annak a valószínűsége, hogy előbb ér haza, minthogy a munkahelyére visszatalálna? (3p)

54.) Az Y és X valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$X\backslash Y$	1	2	3	X peremeloszlása
5	$\frac{1}{10}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
10	$\dots$	$\frac{2}{10}$	$\dots$	$\dots$
Y peremeloszlása	$\dots$	$\dots$	$\frac{4}{10}$	$\dots$

a.) Töltsd ki a táblázatot, ha $EX = 7$ és $EY = \frac{11}{5}$!
b.) X és Y függetlenek egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!
c.) $P(X < 7 \,|\, Y < 3) =?$
d.) $E(Y \,|\, X = 10) =?$

55.) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	
2	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	
X peremeloszlása				

Határozd meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét! Függetlenek-e egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!

56.) Egy dobozban 10 piros, 10 fehér, 10 zöld, 10 kék cédula van, mindegyik 1-től 10-ig számozva. Visszatevéssel húzunk kétszer. Legyen X a pirosak száma a kihúzottak között; Y a kékek száma; Z a 10-esek száma. Határozd meg

a.) X és Y;
b.) X és Z

együttes eloszlását és korrelációját!

57.) Egy szabályos kockával dobunk. Jelölje X a dobott számot, Y pedig azt, hogy a dobott szám hárommal osztva milyen maradékot ad. $R(X, Y) =?$

58.) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen X értéke 1, ha az első dobás fej, és 0, ha az első dobás írás. Legyen Y értéke 1, ha a második dobás fej, és 0, ha a második dobás írás. Mutassuk meg, hogy $X + Y$ és $|X - Y|$ korrelálatlanok, de nem függetlenek!

59.) Legyen X és Y független, azonos eloszlású. Tegyük fel azt is, hogy véges szórásúak. $R(X, aX + bY) =?$

60.) Egy dobozban 5 piros és 5 kék golyó van. 100-szor húzunk visszatevéssel. Jelölje X az első 50, Y az első 75, Z pedig az utolsó 30 húzásból a pirosak számát. $R(X + Z, Y) =?$

61.) 100-szor húzunk visszatevéssel egy olyan dobozból, amelyben 1 piros és 2 fehér golyó van. X jelentse a kihúzott piros golyók számát az első 50, Y pedig az első 20 kísérletben. $R(X, Y) =?$

62.) Egy kockát 10-szer feldobunk. X a dobott 6-osok száma, Y a dobott páratlan számok száma. Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját!

SZ15.) Legyen (X, Y) diszkrét valószínűségi vektorváltozó, mely 3 értéket vesz fel azonos valószínűséggel: $(-1; 0,5), (0; 1), (1; 1,5)$. $R(X, Y) =?$ Meglepő-e az eredmény és miért? (1p)

SZ16.) Egy érmével $(2n+1)$-szer dobunk. Legyen X a fejek száma, Y pedig azon jelek száma, amelyikből több van a sorozatban. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását, majd állapítsuk meg, hogy X és Y függetlenek-e! (2p)

63.) Két kockával addig dobunk, amíg mindkét kockán 6-ost nem kapunk. Adjuk meg a szükséges dobások számának generátorfüggvényét!

64.) Legyenek X és Y függetlenek, p, illetve q paraméterű Pascal-eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $Z = \min(X, Y)$ generátorfüggvényét!

65.) Az alábbi függvények egy-egy valószínűségi változó generátorfüggvényei:
a.) $G(u) = e^{2u-2}$;
b.) $G(u) = \frac{u^2+u+2}{4}$.
Határozd meg a valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását a generátorfüggvény segítségével!

66.) Becsüljük annak a valószínűségét, hogy 100 érmedobásból a fejek száma legalább 60!

67.) Megadható-e olyan 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változó, amelyre $P(|X| \geq 2) \geq 0,5$?

68.) U és V valószínűségi változókról a következőket tudjuk: $R(U,V) = -0,75$; $EU = 4$; $EV = 6$; $D(U) = D(V) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Becsüld alulról a $P(7 < U + V < 12)$ valószínűséget!

SZ17.) Jelölje $u(n)$ annak a valószínűségét, hogy az A és $\overline{A}$ egymás után először az $(n-1)$-edik és n-edik kísérletekben következik be $(P(A) = p)$. Írjuk fel a generátorfüggvényt, a várható értéket és a szórásnégyzetet is! (1p)

SZ18.) Egy kockával addig dobunk, amíg meg nem dobjuk a 6. hatost. Jelölje X a szükséges dobások számát. Határozzuk meg X generátorfüggvényét! (2p)

69.) Bertrand-paradoxon, 1889. Tekintsünk egy kört és válasszuk ki találomra az egyik húrját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala?

70.) Egy R sugarú körre "véletlenszerűen" rádobunk egy r sugarú körlapot, $r < R$ (az r sugarú kör középpontját egyenletes eloszlás szerint választjuk ki az R sugarú körlapon). Mennyi a valószínűsége, hogy az R sugarú kör teljes egészében tartalmazza az r sugarú kört?

71.) A $(0,1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével 3 részre. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) mindhárom szakasz hossza $> 1/4$-nél;
b.) a 3 szakaszból háromszög alkotható?

72.) Írd fel és ábrázold az eloszlásfüggvényt, ha X
a.) indikátorváltozó $p = 1/2$ paraméterrel;
b.) egy olyan kockadobás eredménye, ahol a kockán egy 2-es, két 4-es és három 5-ös van.

73.) Mely c-re lesz eloszlásfüggvény $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ cx^3 & \text{ha } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$?
$P(-1 < X < 1) =$? Mely c-re létezik sűrűségfüggvény? Határozd meg!

74.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} cx^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
a.) Határozd meg a c értékét és X eloszlásfüggvényét!
b.) $P(X < -0.5) =$? $P(X < 0.5) =$? $P(X < 1.5) =$?
c.) $D^2(X) =$?

75.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } 2 < x < c \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
a.) $c =$? $F(x) =$?
b.) $E(X) =$? $D(X) =$?

76.) Legyen $X_1 \sim N(2, 3^2)$ és $X_2 \sim N(4, 4^2)$.
a.) $P(1 \leq X_1 < 3) =$?
b.) Számítsuk ki b értékét, hogy $P(X_1 \geq b) = 0,7$ teljesüljön!
c.) $P\left(\frac{X_1 - X_2}{2} > 0\right) =$?

77.) Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk két pontot, így a szakaszt rövidebb szakaszokra bontjuk. Jelölje X a kapott szakaszok közül a legrövidebbet. Írd fel X eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, valamint számítsd ki X várható értékét!

SZ19.) Adjuk meg a lottón kihúzott öt szám közül a legnagyobb eloszlásfüggvényének az értékét a 45 helyen! (1p)

SZ20.) Három egyforma rúd mindegyikéből találomra letörnek egy-egy darabot. Mi a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni? (2p)

SZ21.) A c valós állandó mely értékére lehet az $f(x) = c \cdot e^{-\sqrt{|x|}}$ $(x \in \mathbb{R})$ sűrűségfüggvény? $EX =$? (2p)

78.) Legyen $X \sim E(0,1)$. Milyen eloszlású $Y = \log\left(\frac{1}{X}\right)$?

79.) Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek $F(x)$ eloszlásfüggvénye szigorúan monoton és folytonos. Milyen eloszlású $Y = F(X)$ (azaz az X valószínűségi változót beleírom az eloszlásfüggvényébe)?

80.) Legyen $X \sim E(-1,1)$ és $Y = 2^X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(2^X) = 2^{EX}$?

81.) Egy dobókockát 720-szor feldobunk. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott 6-osok száma legalább 110, de 140-nél kisebb!

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

82.) Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1,0,2,2 számok. 192-szer húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 108, de 162-nél kisebb!

83.) X_i-k $(i = 1, 2, \ldots)$ független val. változók Hova konvergál és hogyan?

a.)	$X_i \sim \mathrm{Ind}(p)$	$\frac{X_1^5+\ldots+X_n^5}{n}$
b.)	X_i: az i-edik kockadobás eredménye	$\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$
c.)	$X_i \sim \mathrm{Exp}(2)$ $(i = 1, 2, \ldots)$	$\frac{e^{X_1}+\ldots+e^{X_n}}{n}$

84.) Legalább hány embert kell megkérdezni egy közvéleménykutatásnál, ha egy adott párt támogatottságát (az eltérést a várható támogatottságtól) legalább 95%-os valószínűséggel $0,01$–nél kisebb eltéréssel szeretnénk megbecsülni?
a.) Számoljunk a Csebisev-egyenlőtlenséggel!
b.) Számoljunk a centrális határeloszlástétellel!

SZ22.) Egy szabályos kockát dobálunk. Hova tart és milyen értelemben a dobott számok mértani közepe? (1p)

SZ23.) Legyen $X \sim N(2,1)$ és $Y = X^7$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! (2p)

85.) Legyen $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. minta ismeretlen eloszlásból.
a.) Torzítatlan becslés-e a várható értékre nézve az átlag?
b.) Torzítatlan becslés-e a szórásnégyzetre nézve a tapasztalati szórásnégyzet? Amennyiben nem az, hogyan tudnánk torzítatlanná tenni?
c.) Mikor konzisztens becslése a várható értéknek az átlag?
d.) Adjunk torzítatlan és konzisztens becslést az eloszlásfüggvényre!

86.) $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i.i.d. minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-3\lambda}$-ra és $\frac{1}{\lambda}$-ra!

87.) $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ i.i.d. minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-\lambda}$-ra és λ^2-re!

88.) Legyen $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. minta valamely véges szórású eloszlásból, és tekintsük a $\mathrm{T}(\mathbf{X}) = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ alakú lineáris becsléseket, ahol $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Feltéve, hogy $\mathrm{T}(\mathbf{X})$ a várható érték torzítatlan becslése, mely $a_1, \ldots, a_n$ számokra lesz minimális a $D^2(T(\mathbf{X}))$?

89.) Határozzuk meg az ismeretlen paraméter(ek) maximum likelihood és momentum becslését, ha a minta
a.) $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású;
b.) $\mathrm{Poi}(\lambda)$ eloszlású;
c.) $\mathrm{E}(a, b)$ eloszlású, ahol $a < b$, mindkettő paraméter.
Torzítatlan a becslés? Ha nem az, próbáljuk meg torzítatlanná tenni! Konzisztens a becslés?
