

Küszöbmeghaladási modellek és a súlyozott bootstrap alkalmazása magyarországi csapadékadatok modellezésére

Varga László

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Síkfőkút
2015. május 16.

- Cikk címe: Applications of threshold models and the weighted bootstrap for Hungarian precipitation data
- Szerzők:
 - Varga László
 - Rakonczai Pál
 - Zempléni András
- Folyóirat címe: Theoretical and Applied Climatology
- Megjelenés ideje: 2015. április

- 1 Motiváció
- 2 Küszöbmeghaladási modellek (Threshold models)
- 3 Bootstrap és profil likelihood
- 4 Alkalmazások magyarországi csapadékadatokra
- 5 Összefoglalás

- Klímaváltozás – leggyakrabban a hőmérsékletet vizsgálták
- Fókusz: a **csapadékadatok** extrém értékei
- Aktualitás: a 2014-es kora nyári árvíz
- Küszöbmeghaladás – több információ marad meg, mint az éves maximumok vizsgálata esetén
- Felső kvantilisok becsléseire matematikai eljárás
- Hagyományos bootstrap módszerek az extrémérték-elemzésben
→ túl szűk konfidenciaintervallumok
- Térbeli kapcsolatok vizsgálata

- Klímaváltozás – leggyakrabban a hőmérsékletet vizsgálták
- Fókusz: a **csapadékadatok** extrém értékei
- Aktualitás: a 2014-es kora nyári árvíz
- Küszöbmeghaladás – több információ marad meg, mint az éves maximumok vizsgálata esetén
- Felső kvantilisok becsléseire matematikai eljárás
- Hagyományos bootstrap módszerek az extrémérték-elemzésben
→ túl szűk konfidenciaintervallumok
- Térbeli kapcsolatok vizsgálata

Egydimenziós küszöbmeghaladási modellek I.

- Kezdetek: 1970-es évek
- Küszöbérték (threshold): u
- Véletlen jelenség egy minket érdeklő jellemzője: X
- Küszöbmeghaladás: $X - u \mid X > u$
- Küszöbmeghaladás elofv.-e: $F_u(z) = P(X - u \leq z \mid X > u)$
- Egy valószínűségi változó általánosított Pareto-eloszlást (GPD) követ, ha eloszlásfüggvénye a következő:

$$H_{\xi, \sigma}(z) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{ha } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{z}{\sigma}} & \text{ha } \xi = 0 \end{cases}$$

Alakparaméter	Eloszláscsalád	Tartó
$\xi > 0$	II. típusú Pareto $\left(0, \frac{\sigma}{\xi}, \frac{1}{\xi}\right)$	$0 \leq z$
$\xi = 0$	Exponenciális $\left(\frac{1}{\sigma}\right)$	$0 \leq z$
$\xi < 0$		$0 \leq z \leq -\frac{\sigma}{\xi}$

Egydimenziós küszöbmeghaladási modellek I.

- Kezdetek: 1970-es évek
- Küszöbérték (threshold): u
- Véletlen jelenség egy minket érdeklő jellemzője: X
- Küszöbmeghaladás: $X - u \mid X > u$
- Küszöbmeghaladás elofv.-e: $F_u(z) = P(X - u \leq z \mid X > u)$
- Egy valószínűségi változó általánosított Pareto-eloszlást (GPD) követ, ha eloszlásfüggvénye a következő:

$$H_{\xi, \sigma}(z) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{ha } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{z}{\sigma}} & \text{ha } \xi = 0 \end{cases}$$

Alakparaméter	Eloszláscsalád	Tartó
$\xi > 0$	II. típusú Pareto $\left(0, \frac{\sigma}{\xi}, \frac{1}{\xi}\right)$	$0 \leq z$
$\xi = 0$	Exponenciális $\left(\frac{1}{\sigma}\right)$	$0 \leq z$
$\xi < 0$		$0 \leq z \leq -\frac{\sigma}{\xi}$

- **Extrémérték-elmélet 2. alaptétele** (Pickands-Balkema-de Haan tétel, 1974-75):

Legyenek X_1, \dots, X_n i.i.d. valószínűségi változók közös F elofv.-nyel és F_u küszöbmeghaladás-elofv.-nyel.

Tegyük fel, hogy X_n^* aszimptotikusan GEV-eloszláshoz tart.

Legyen $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

Ekkor létezik egy olyan $\sigma(u)$ mérhető függvény, amelyre

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq z \leq x_0 - u} |F_u(z) - H_{\xi, \sigma(u)}(z)| = 0.$$

- A csapadékadatok adott küszöb feletti értékeinek modellezésére a GPD-eloszlás megfelelő választás.
- Küszöb megválasztása?

- **Extrémérték-elmélet 2. alaptétele** (Pickands-Balkema-de Haan tétel, 1974-75):

Legyenek X_1, \dots, X_n i.i.d. valószínűségi változók közös F elofv.-nyel és F_u küszöbmeghaladás-elofv.-nyel.

Tegyük fel, hogy X_n^* aszimptotikusan GEV-eloszláshoz tart.

Legyen $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

Ekkor létezik egy olyan $\sigma(u)$ mérhető függvény, amelyre

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq z \leq x_0 - u} |F_u(z) - H_{\xi, \sigma(u)}(z)| = 0.$$

- A csapadékadatok adott küszöb feletti értékeinek modellezésére a GPD-eloszlás megfelelő választás.
- Küszöb megválasztása?

Paraméterbecslés GPD-eloszlás esetén

- Tegyük fel, hogy $\xi \neq 0$
- Sűrűségfüggvény: $h_{\xi,\sigma}(z) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$
- Log-likelihood függvény: $l(\xi, \sigma | \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n \log h_{\xi,\sigma}(x_i) \rightsquigarrow \hat{\sigma}, \hat{\xi}$
- Visszatérési szint: azon küszöbszint, aminél magasabb értékek csak bizonyos évente fordulnak elő. Precízen: ha
 - l év alatt
 - n megfigyelésünk van (évente $\frac{n}{l}$ megfigyelés), és
 - a minket érdeklő visszatérési idő m év, akkor
 - a visszatérési szint az adatok/eloszlás $q = 1 - \frac{1}{m} \frac{l}{n}$ -kvantilise.
- Új paraméterek: a ξ alakparaméter és a $H^{-1}(q)$ visszatérési szint
 - $\sigma = \sigma(\xi, H^{-1}(q)) = \frac{\xi H^{-1}(q)}{(1-q)^{-1}-1}$
 - $l(\xi, H^{-1}(q) | \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^n \log h_{\xi, H^{-1}(q)}(X_i) \rightsquigarrow \hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}$

$$\text{ahol } h_{\xi, H^{-1}(q)}(z) = \frac{(1-q)^{-1}-1}{\xi H^{-1}(q)} \left(1 + z \frac{(1-q)^{-1}-1}{H^{-1}(q)}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$$

Paraméterbecslés GPD-eloszlás esetén

- Tegyük fel, hogy $\xi \neq 0$
- Sűrűségfüggvény: $h_{\xi, \sigma}(z) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$
- Log-likelihood függvény: $l(\xi, \sigma | \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n \log h_{\xi, \sigma}(x_i) \rightsquigarrow \hat{\sigma}, \hat{\xi}$
- Visszatérési szint: azon küszöbszint, aminél magasabb értékek csak bizonyos évente fordulnak elő. Precízen: ha
 - l év alatt
 - n megfigyelésünk van (évente $\frac{n}{l}$ megfigyelés), és
 - a minket érdeklő visszatérési idő m év, akkor
 - a visszatérési szint az adatok/eloszlás $q = 1 - \frac{1}{m} \frac{l}{n}$ -kvantilise.
- Új paraméterek: a ξ alakparaméter és a $H^{-1}(q)$ visszatérési szint
 - $\sigma = \sigma(\xi, H^{-1}(q)) = \frac{\xi H^{-1}(q)}{(1-q)^{-1}-1}$
 - $l(\xi, H^{-1}(q) | \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^n \log h_{\xi, H^{-1}(q)}(X_i) \rightsquigarrow \hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}$

$$\text{ahol } h_{\xi, H^{-1}(q)}(z) = \frac{(1-q)^{-1}-1}{\xi H^{-1}(q)} \left(1 + z \frac{(1-q)^{-1}-1}{H^{-1}(q)}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$$

- Tegyük fel, hogy $\xi \neq 0$
- Sűrűségfüggvény: $h_{\xi, \sigma}(z) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$
- Log-likelihood függvény: $l(\xi, \sigma | \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n \log h_{\xi, \sigma}(x_i) \rightsquigarrow \hat{\sigma}, \hat{\xi}$
- Visszatérési szint: azon küszöbszint, aminél magasabb értékek csak bizonyos évente fordulnak elő. Precízen: ha
 - l év alatt
 - n megfigyelésünk van (évente $\frac{n}{l}$ megfigyelés), és
 - a minket érdeklő visszatérési idő m év, akkor
 - a visszatérési szint az adatok/eloszlás $q = 1 - \frac{1}{m} \frac{l}{n}$ -kvantilise.
- Új paraméterek: a ξ alakparaméter és a $H^{-1}(q)$ visszatérési szint
 - $\sigma = \sigma(\xi, H^{-1}(q)) = \frac{\xi H^{-1}(q)}{(1-q)^{-1}-1}$
 - $l(\xi, H^{-1}(q) | \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^n \log h_{\xi, H^{-1}(q)}(X_i) \rightsquigarrow \hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}$

$$\text{ahol } h_{\xi, H^{-1}(q)}(z) = \frac{(1-q)^{-1}-1}{\xi H^{-1}(q)} \left(1 + z \frac{(1-q)^{-1}-1}{H^{-1}(q)}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$$

- BGPD I. modellek: minden koordináta esetén meghaladás
 - Relatív kevés adat marad
 - Matematikailag kezelhetőbb
- BGPD II. modellek: legalább az egyik koordináta esetén meghaladás

- Küszöbvektor: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

- Küszöbmeghaladás: $\mathbf{X} - \mathbf{u} \mid \max(\mathbf{X} - \mathbf{u}) > 0$

- Kétváltozós GPD-eloszlás:

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{\log G(0,0)} \log \frac{G(z_1, z_2)}{G(\min(z_1, 0), \min(z_2, 0))}, \text{ ahol } 0 < G(0, 0) < 1$$

és G a kétváltozós extrémérték-eloszlás elofv.-e

- A peremek nem feltétlenül (egydimenziós) GPD-eloszlásúak
- Minden perem függ minden paramétertől
- Fő előny: több adat marad, így megbízhatóbb a paraméterekbecslés

- Története:

- Newton-Raftery (1994), Michael E. Newton (1991) disszertációja
- Alkalmazások: kopulák, regressziós modellek, AR, GARCH folyamatok

- Bootstrap súlyok: τ_{ni} , ahol $i = 1, \dots, n$ és $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók

- Feltételek a súlyokra vonatkozóan:

- Függetlenek az adatgeneráló folyamattól
- $P(\tau_{ni} \geq 0) = 1; \quad i = 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots$
- $\tau_{n1}, \dots, \tau_{nn}$ első két momentuma véges és minden fix n -re megegyezik
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E\tau_{ni} = 1 \quad i = 1, 2, \dots$
- $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} E\tau_{ni}^2 < \infty \quad i = 1, 2, \dots$

- Története:
 - Newton-Raftery (1994), Michael E. Newton (1991) disszertációja
 - Alkalmazások: kopulák, regressziós modellek, AR, GARCH folyamatok
- Bootstrap súlyok: τ_{ni} , ahol $i = 1, \dots, n$ és $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók
- Feltételek a súlyokra vonatkozóan:
 - Függetlenek az adatgeneráló folyamattól
 - $P(\tau_{ni} \geq 0) = 1$; $i = 1, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$
 - $\tau_{n1}, \dots, \tau_{nn}$ első két momentuma véges és minden fix n -re megegyezik
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} E\tau_{ni} = 1$ $i = 1, 2, \dots$
 - $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} E\tau_{ni}^2 < \infty$ $i = 1, 2, \dots$

- Példák lehetséges súlykészletre: független exponenciális, polinomiális, Dirichlet-eloszlás
- Súlyozott bootstrap log-likelihood függvény:

$$l^*(\xi, H^{-1}(q) | \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^n \tau_{ni} \log h_{\xi, H^{-1}(q)}(X_i) \rightsquigarrow \widetilde{\xi}, \widetilde{H^{-1}(q)}$$

- Bizonyos regularitási feltételek esetén az így kapott becslés (gyengén) konzisztens és aszimptotikusan normális majdnem minden minta esetén.

- Profil log-likelihood függvény:

$$l_p(H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n) = \max_{\xi} l(\xi, H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n)$$

- Ha $\hat{\xi}$ és $\widehat{H^{-1}(q)}$ jelöli az ML-becsléseket, akkor bizonyos regularitási feltételek esetén

$$2 \cdot \left[l(\hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}|\mathbf{X}_n) - l_p(H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_1^2$$

- Ugyancsak teljesül a megfelelő l^* és l_p^* súlyozott bootstrap verziókra

$$\frac{2}{\gamma} \left[l^*(\hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}|\mathbf{X}_n) - l_p^*(H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_1^2.$$

- Ennek segítségével α -konfidenciaintervallumot lehet készíteni a visszatérési szintre (általában nem szimmetrikus):

$$I_{\alpha}^* = \left\{ H^{-1}(q) : l_p^*(H^{-1}(q)|\mathbf{x}) \geq l^*(\hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}|\mathbf{x}) - \frac{\gamma \cdot c_{1-\alpha}}{2} \right\}$$

- Profil log-likelihood függvény:

$$l_p(H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n) = \max_{\xi} l(\xi, H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n)$$

- Ha $\hat{\xi}$ és $\widehat{H^{-1}(q)}$ jelöli az ML-becsléseket, akkor bizonyos regularitási feltételek esetén

$$2 \cdot \left[l(\hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}|\mathbf{X}_n) - l_p(H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_1^2$$

- Ugyancsak teljesül a megfelelő l^* és l_p^* súlyozott bootstrap verziókra

$$\frac{2}{\gamma} \left[l^*(\hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}|\mathbf{X}_n) - l_p^*(H^{-1}(q)|\mathbf{X}_n) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_1^2.$$

- Ennek segítségével α -konfidenciaintervallumot lehet készíteni a visszatérési szintre (általában nem szimmetrikus):

$$I_{\alpha}^* = \left\{ H^{-1}(q) : l_p^*(H^{-1}(q)|\mathbf{x}) \geq l^*(\hat{\xi}, \widehat{H^{-1}(q)}|\mathbf{x}) - \frac{\gamma \cdot c_{1-\alpha}}{2} \right\}$$

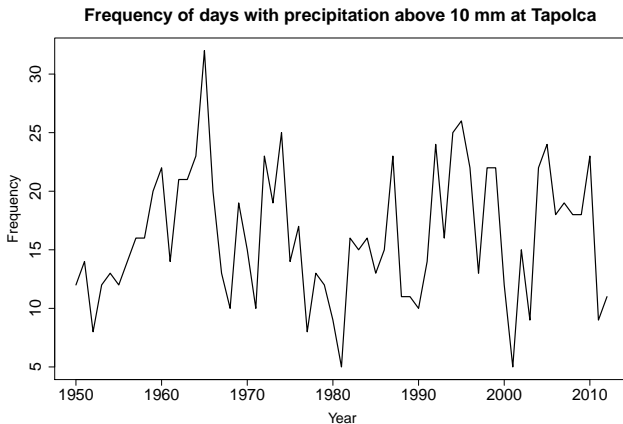
Csapadékadatok

- Forrás: a European Climate Assessment & Dataset rácsos adatbázisa (<http://www.ecad.eu/>)
- Napi csapadékmennyiség 1950 és 2013 között 5 magyarországi település közelében
- Küszöb: 10 mm (minden állomásra)



Küszöbmeghaladások száma évente

Tapolcán a 10 mm-es küszöb feletti napok számának alakulása évente:



- Nem figyelhető meg egyértelműen növő/csökkenő tendencia

Küszöbmeghaladások száma havonta

A választott $u=10$ mm-es küszöb feletti havi gyakoriságok:

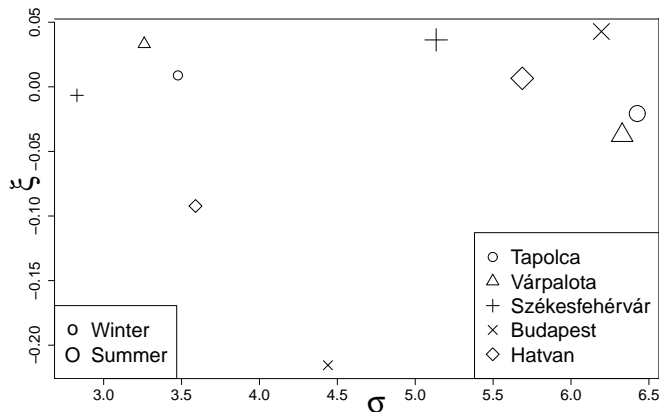
Hónapok	Tapolca	Várpalota	Székesfehérvár	Budapest	Hatvan
Január	33	30	35	37	32
Február	30	31	28	36	31
Március	37	30	15	15	19
Április	60	53	41	46	35
Május	96	80	74	78	79
Június	134	103	104	110	89
Július	124	97	81	79	79
Augusztus	135	105	91	70	75
Szeptember	113	91	69	65	71
Október	89	80	67	62	58
November	102	102	82	91	82
December	66	56	56	59	49

- Szezonális figyelhető meg az extrém értékeknél
- A nyári hónapokban volt a legtöbb küszöb feletti érték
- A téli (DJF) és nyári (JJA) hónapok külön kezelése

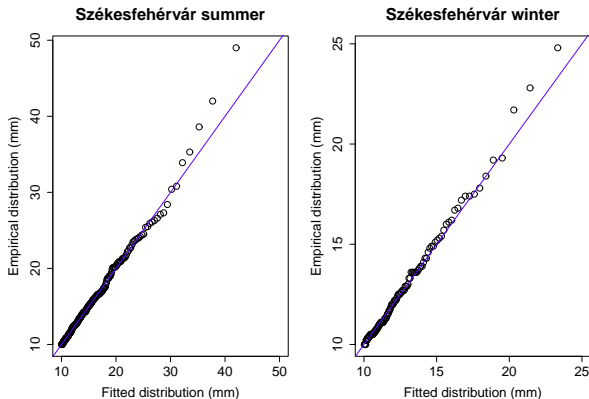
GPD modell illesztése I.

- GPD-eloszlás illesztése a nyári és a téli hónapokra minden állomás esetén

A becsült paraméterek értékei állomástól és hónaptól függően:

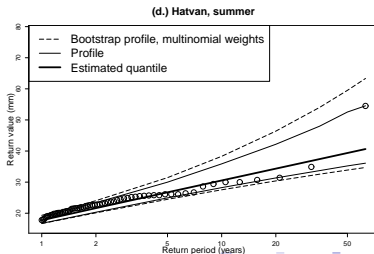
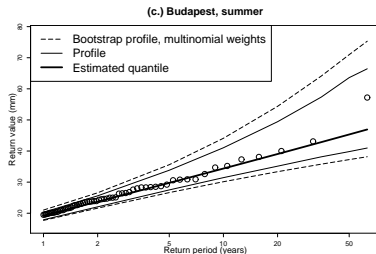
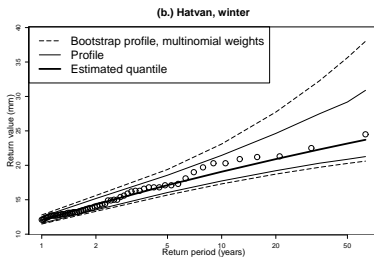
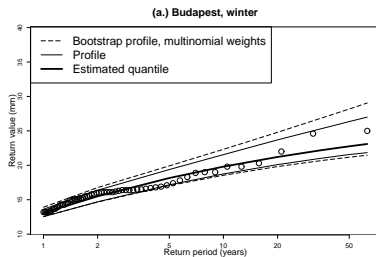


Az illeszkedés QQ-plot-ja Székesfehérvár állomásra:



Visszatérési szintek becslése

Becsült visszatérési szintek és 95%-os konfidenciahalmazok profil likelihood és súlyozott (polinomiális) bootstrap profil likelihood módszerek esetén:



Lefedési valószínűségek

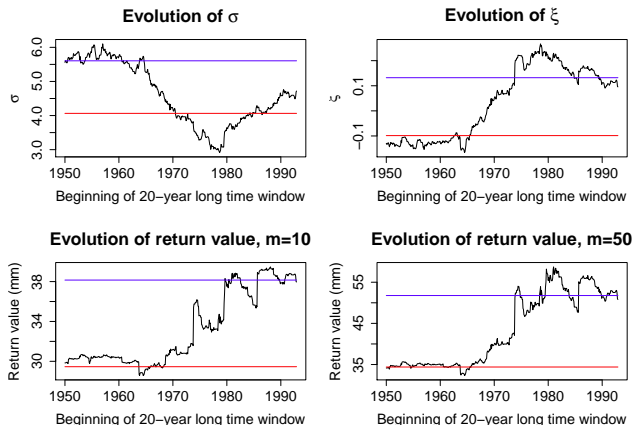
0,95-ös konfidenciaintervallumok (alsó és felső 2,5%) lefedési valószínűségei kevert GPD-eloszlás esetén budapesti becsült súlykészlet esetén (w : nyári becslés súlya, $1 - w$: téli becslés súlya):

Minta-méret	Súly (w)	Profil likelihood	Súlyozott boot (exponenciális)	Súlyozott boot (polinomiális)
50	1	93.3	98.8	99.0
100	1	94.5	98.7	98.7
200	1	95.2	98.5	98.6
200	0.5	89.8	97.0	97.4
500	0.5	88.5	96.7	97.2
500	0.8	80.8	93.4	93.7

- Exponenciális súlyokkal egy kivétellel jobb lefedési valószínűségek adódtak
- Keverék eloszlásnál a súlyozott bootstrap jobb
- A hagyományos profil likelihood nagyon aszimmetrikus
- A többi állomásnál hasonló eredmények adódtak

Az időbeli változás mértéke

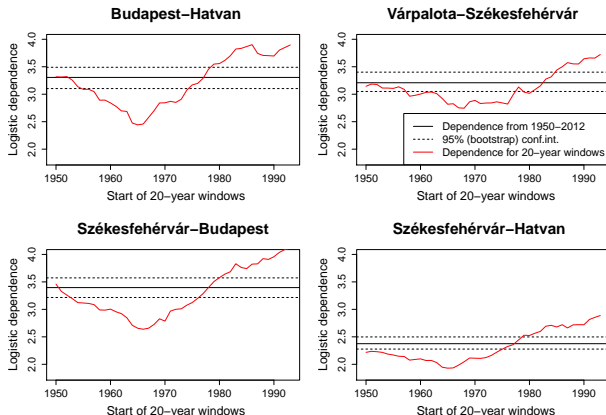
20 éves mozgóablak eredmények Budapest állomásra:



- A piros és a kék vonalak a teljes adatsorból készített 99%-os konfidenciaintervallum alsó és felső határai
- Az extrémértékek nagysága megnőtt

Összefüggőség időbeli változása (BGPD II. modell) I.

20 éves mozgóablak eredmények négy állomáspárra:



- A szaggatott vonalak a teljes adatsorból készített 95%-os konfidenciaintervallum alsó és felső határai
- Az összefüggőségi paraméterek jellemzően csökkentek, majd megnőttek
- Nagyobb távolság \Rightarrow kisebb összefüggőség

Összefüggőség időbeli változása II.

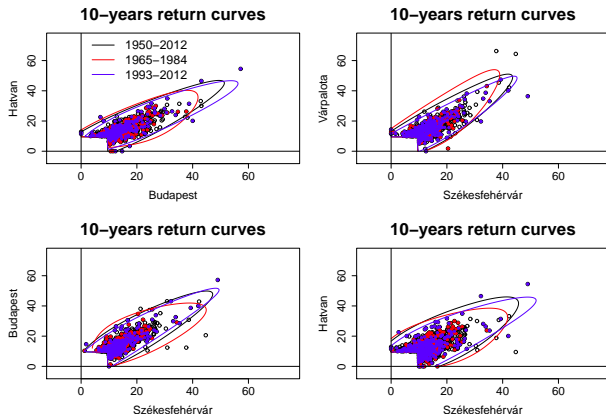
1965-84-es időszakról az 1993-2002-es időszakra a függőségi paraméter változása állomáspáronként:

	5%	Átlag	95%	1965-1984	1993-2012	Növekedés (%)
Tapolca-Várpalota	2.47	2.57	2.66	2.43	2.69	10.7
Tapolca-Szfv.	1.75	1.82	1.86	1.69	1.95	15.4
Tapolca-Budapest	1.43	1.52	1.61	1.41	1.59	12.8
Tapolca-Hatvan	1.44	1.54	1.6	1.35	1.5	11.1
Várpalota-Szfv.	3.04	3.2	3.34	2.82	3.72	31.9
Várpalota-Budapest	1.99	2.05	2.11	1.74	2.38	36.8
Várpalota-Hatvan	1.68	1.73	1.79	1.45	2.07	42.8
Székesfehérvár-Bp.	3.28	3.42	3.57	2.66	4.11	54,5
Szfv.-Hatvan	2.29	2.37	2.46	1.92	2.89	50,5
Budapest-Hatvan	3.14	3.29	3.48	2.44	3.9	59.8

- A Tapolca-Hatvan páron kívül mindegyik növekedés szignifikáns

"Lefedési régiók" időbeli változása

10 éves "lefedési régiók" négy állomáspár esetén különböző időszakokra:



- A legnagyobb változás a (Budapest, Hatvan), (Budapest, Székesfehérvár) és (Székesfehérvár, Hatvan) párokra volt megfigyelhető

Összefüggőség változásának szignifikanciája

- $p = P(X > x_{r10}, Y > y_{r10})$, ahol x_{r10} és y_{r10} a peremek 10 éves visszatérési időnek megfelelő kvantilisei adott időszakra

1965-84-es időszakról az 1993-2002-es időszakra a fenti p valószínűségek hányadosa állomáspáronként:

	Várpalota	Székesfehérvár	Budapest	Hatvan
Tapolca	1.07	1.08	1.23	1.15
Várpalota	–	2.21	1.86	1.75
Székesfehérvár	–	–	2.20	2.45
Budapest	–	–	–	2.59

- Vastagított: a változás szignifikáns volt
- Mi okozza a 2 feletti, magas értékeket?

Összefüggőség változásának okai

- $p = P(X > x_{r10}, Y > y_{r10})$, ahol x_{r10} és y_{r10} a peremek 10 éves visszatérési időnek megfelelő kvantilisei adott időszakra

1965-84-es időszakról az 1993-2002-es időszakra a fenti p valószínűségek hányadosa állomáspáronként:

	Várpalota	Székesfehérvár	Budapest	Hatvan
Tapolca	1.07	1.08	1.23	1.15
Várpalota	–	2.21	1.86	1.75
Székesfehérvár	–	–	2.20	2.45
Budapest	–	–	–	2.59

- Vastagított: a változás szignifikáns volt
- Mi okozza a 2 feletti, magas értékeket?

Összefüggőség változásának okai

- 1 A függőségi paraméter szignifikánsan megnőtt
- 2 A peremek visszatérési szintjei jelentősen megemelkedtek

1965-84-es és 1993-2002-es időszakokra a 10 éves visszatérési szintek 95%-os súlyozott bootstrap (exponenciális súlyok) konfidenciaintervallumai állomásonként:

Állomás	1965–1984			1993–2012			10 éves visszatérési szint növekedése (%)
	10 éves vt. szint	Konf.int.		10-year vt. szint	Konf.int.		
		alsó	felső		alsó	felső	
Tapolca	38.97	32.91	54.55	41.64	35.16	58.36	6.85
Várpalota	33.08	27.78	47.51	39.24	32.89	55.54	18.61
Székesfv.	28.21	24.87	37.12	37.46	30.40	56.73	32.79
Budapest	31.53	27.81	41.81	40.26	32.64	62.07	27.68
Hatvan	29.25	25.69	39.96	37.09	30.85	55.30	26.81

- A súlyozott likelihood bootstrap használható az extrémérték-elemzésben, és még számítási többletidőt se okoz.
- A BGPLD II. modellek segítségével kiválóan a csapadékadatok térbeli és időbeli összefüggései is feltárhatók, és a hagyományos BGPLD I. modellekhez képest kisebb minta esetén is megbízható becslést lehet velük kapni.
- A kiugró csapadéértékek gyakoribbá váltak, de ez a periódus már több évtizede tart.
- Erősödött az összefüggés a vizsgált állomáspárok többsége között.

Köszönöm a figyelmet!

- A súlyozott likelihood bootstrap használható az extrémérték-elemzésben, és még számítási többletidőt se okoz.
- A BGPLD II. modellek segítségével kiválóan a csapadékadatok térbeli és időbeli összefüggései is feltárhatók, és a hagyományos BGPLD I. modellekhez képest kisebb minta esetén is megbízható becslést lehet velük kapni.
- A kiugró csapadékértékek gyakoribbá váltak, de ez a periódus már több évtizede tart.
- Erősödött az összefüggés a vizsgált állomáspárok többsége között.

Köszönöm a figyelmet!

S. Coles:

An introduction to statistical modeling of extreme values.
Springer, 2001.

S. Dan'azumi, S. Shamsudin, A. Aris:

Modeling the distribution of rainfall intensity using hourly data.
American Journal of Environmental Sciences , Vol. 6, 2010.

T. Klein, M. G. Albert and G. P. Können:

Trends in indices of daily temperature and precipitation extremes in Europe, 1946-99.
Journal of Climate, Vol. 16, 3665–3680, 2003.

J. Kyselý:

A cautionary note on the use of nonparametric bootstrap for estimating uncertainties in extreme-value models.

Journal of Applied Meteorology and Climatology, Vol. 47, 3236–3251, 2008.

P. Rakonczai:

mcpd: Functions for multivariate generalized Pareto distribution (MGPD of Type II).

<http://CRAN.R-project.org/package=mcpd>, 2012.

P. Rakonczai, N. Tajvidi:

On prediction of bivariate extremes.

International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics, Vol. 3, 115–139, 2012.

P. Rakonczai, A. Zempléni:

Bivariate generalized Pareto distribution in practice: models and estimation.

Environmetrics, Vol. 23, 219–227, 2012.

F. Uboldi, A. N. Sulis, C. Lussana, M. Cislaghi, M. Russo:

A spatial bootstrap technique for parameter estimation of rainfall annual maxima distribution.

Hydrology and Earth System Sciences, Vol. 10, 11755–11794, 2013.

L. Varga, A. Zempléni:

Weighted bootstrap in GARCH models.

arXiv preprint arXiv:1209.1302, 2012.