Valószínűségszámítás 1 gyakorlat

Megoldások, megoldásvázlatok, végeredmények
Alkalmazott matematikus szakirány

Bármilyen, a segédanyaggal kapcsolatos észrevételt – hibákat, más megoldásokat, egyéb ötleteket – örömmel várok a `vargal4@cs.elte.hu` címre (Varga László, ELTE TTK, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék).

1.) Egy urnában 3 fehér, 2 zöld és 1 piros golyó van. Egymás után kiveszünk 2 golyót az urnából. Mik lesznek a kísérlet lehetséges kimenetelei (azaz az eseménytér elemei), ha a golyók kihúzásának sorrendjét
a.) figyelembe vesszük;
b.) nem vesszük figyelembe.
Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!
Megoldás. Jelölje FZ azt az eseményt, amikor elsőre fehéret és másodikra zöldet húztunk. Hasonlóan jelöljük az összes többit.

a.)

Sorszám	ω_i	$P(\omega_i)$
1	FF	6/30
2	FZ	6/30
3	FP	3/30
4	ZF	6/30
5	ZZ	2/30
6	ZP	2/30
7	PF	3/30
8	PZ	2/30

b.)

Sorszám	ω_i	$P(\omega_i)$
1	FF	6/30
2	FZ vagy ZF	12/30
3	FP vagy PF	6/30
4	ZZ	2/30
5	ZP vagy PZ	4/30

2.) 2 számozott érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Mik lesznek az eseménytér elemei? Határozzuk meg az elemi események valószínűségét!
Megoldás. Jelölje I azt, hogy írást dobtunk, F pedig a fejdobást.
$\Omega = \{II, FII, FIF, IFI, IFF, FFII, FFIF, FFFI, FFFF\}$
$P(II) = 1/4$, $P(FII) = P(FIF) = P(IFI) = P(IFF) = 1/8$,
$P(FFII) = P(FFIF) = P(FFFI) = P(FFFF) = 1/16$

3.) Tegyük fel, hogy egy irodában 3 titkárnő dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik titkárnő megbetegszik ($i = 1, 2, 3$). Fejezzük ki az A_i események segítségével a következő események valószínűségét:
a.) az első titkárnő megbetegszik;
b.) csak az első titkárnő betegszik meg;
c.) mindhárom titkárnő megbetegszik;
d.) legalább 1 titkárnő megbetegszik;
e.) legalább 2 titkárnő megbetegszik.
Megoldás.
a.) $P(A_1)$
b.) $P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$
c.) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
d.) $1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$
e.) $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

4.) Aritmethiában az autók rendszámai ötjegyű számok 00000 és 99999 között. Ezek közül találomra választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy
a.) van 6 a jegyek között;
b.) minden számjegy különböző;
c.) minden számjegy egyforma;
d.) csak két számjegy egyezik meg;
e.) három, illetve kettő számjegy megegyezik?
Megoldás.
a.) P(van 6 a jegyek között)=1-P(nincs 6 köztük)=$1 - \frac{9^5}{10^5} = 1 - 0,9^5$
b.) $\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{10^5}$
c.) $\frac{10}{10^5}$
d.) Először válasszunk ki a rendszám 5 helyéből azt a kettőt, ahova az azonosakat helyezzük, majd sorban válasszuk ki 4 különböző számjegyet! Így a keresett valószínűség $\frac{\binom{5}{2}\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{10^5}$.
Másik megoldás: Először válasszunk ki a 10-ből 4 számjegyet, majd a 4-ből vegyünk ki 1-et, amelyik duplán lesz, végül a kapott 5 számból képezzük az összes lehetséges sorrendet. Így a keresett valószínűség: $\frac{\binom{10}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot\frac{5!}{2!1!1!1!}}{10^5}$.
e.) Az előző feladatbeli gondolatmeneteket követve, $\frac{\binom{5}{3}\cdot10\cdot9}{10^5}$, vagy $\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\frac{5!}{2!3!}}{10^5}$ adódik.

5.) A német labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 20 mezőnyjátékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 10-es csoportba, hogy Schweinsteiger és Özil egymás ellen játszik?
Megoldás.
1. megoldás: Rögzítsük le Özilt az egyik csapatba. Ezután Schweinsteiger már csak a másik csapatba kerülhet, ahol 10 hely van, összesen pedig 19 üres hely volt, így a keresett valószínűség $\frac{10}{19}$.
2. megoldás: Összes eset: $\binom{20}{10}$, mivel 20 játékosból 10-et kell kiválasztani, hogy egy csapatot összerakjunk, a sorrend nem számít.
Jó esetek: $2 \cdot \binom{18}{9}$, mivel ha a két egymás ellen játszó játékost lerögzítjük, akkor 18 játékosból kell még 9-et kiválasztani, hogy meglegyen egy csapat. Aztán még 2-vel be kell szorozni, mert a két rögzítet játékost megcserélhetjük egymással.

6.) De Méré problémája, 1654. De Méré lovag nagy szerencsejátékos volt, az alábbi két kérdéssel fordult Pascal-hoz:

- Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz?
- Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy

dupla hatos lesz?

A lovag tisztában volt vele, hogy az első kérdésre adandó válasz $\frac{1}{2}$-nél kicsivel nagyobb, a másodikra pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsivel kisebb, de fogalma se volt, miért.

a.) Számítsuk ki a két valószínűség pontos értékét!

b.) A két valószínűség miért van közel egymáshoz?

Megoldás.

a.) Tekintsük a következő eseményeket: A: 4-szer dobunk fel egy kockát, legalább egy hatost kapunk; B: 24-szer dobunk fel két kockát, legalább egy dupla (66) hatost kapunk.

$p := P(A) = 1 - P(4 \text{ dobásból nincs 6-os}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 51,77\%$

$q := P(B) = 1 - P(24 \text{ dobásból nincs 66}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49,14\%$

b.) Vegyük észre, hogy p és q a jól ismert $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat egyes tagjainak transzformáltjai:

$p = 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{6}\right)^6\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - (a_6)^{\frac{2}{3}}$

$q = 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{24}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - (a_{24})^{\frac{2}{3}}$

Ismert, hogy az a_n sorozat határértéke e^{-1}, így a "limesz valószínűség" $1-(e^{-1})^{\frac{2}{3}} \approx 48,66\%$ lenne. A sorozat gyorsan konvergál, így p és q viszonylag közel van egymáshoz. Ugyancsak ismert, hogy a_n sorozat monoton növő, így a transzformált sorozat monoton csökkenő lesz. Ez a magyarázata annak, hogy $p > q$.

7.) Mintavétel. Adott N különböző termék, amik között van M selejtes. Veszünk n elemű mintát

a.) visszatevés nélkül;

b.) visszatevéssel.

Mennyi a valószínűsége, hogy az n termékből pontosan k selejtest sikerült kiválasztanunk, amennyiben számít a kihúzás sorrendje?

Megoldás. Mivel számít a sorrend, ezért végig variációkkal számolunk.

a.) $\dfrac{\binom{n}{k}\frac{M!}{(M-k)!}\frac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$;

b.) $\dfrac{\binom{n}{k}M^k(N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$, ahol $\frac{M}{N}$ a selejtarány, ez helyett általában p-t írunk.

8.) Egy magyarkártya-csomagból visszatevéssel húzunk 3 lapot.

a.) Írjuk fel az eseményteret!

b.) Milyen eséllyel húzunk pontosan egy piros színű lapot?

c.) Milyen eséllyel húzunk legalább egy piros színű lapot?

Megoldás. Oldjuk meg az előző feladat alapján: N=32 (összes lap), M=8 (pirosak), n=3, a mintavétel visszatevéses.

a.) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{\text{lapok halmaza}\}\}$

b.) a pirosok aránya$= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ így a keresett vsz.: $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2$

c.) $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

9.) Tekintsük egy lottóhúzás (5-ös lottó) eredményét.

a.) Írjuk fel az eseményteret!

b.) Milyen eséllyel lesz két találatom?

c.) Milyen eséllyel lesz legalább két találatom?

Megoldás. A feladat kezelhető mintavételként: N=90, M=5, n=5.

a.) $\Omega = \{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) : 1 \le n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 \le 90\}$

b.) $\dfrac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

c.) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$

10.) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy totószelvényt vaktában kitöltve, a 13 mérkőzés eredménye közül éppen 11-et találunk el!

Megoldás. $\binom{13}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^2$

11.) A $(0,1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével 3 részre. Mennyi a valószínűsége, hogy

a.) mindhárom szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{2}$-nél;

b.) a 3 szakaszból háromszög alkotható;

c.) a legrövidebb szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{5}$-nél?

Megoldás. Jelöljük mindhárom feladatrészben a keletkezett szakaszok hosszát x,y,z-vel. Mivel a szakasz 1 hosszú, $z = 1 - x - y$.

Oldjuk meg a feladatot geometriai vsz.-i mezőn!

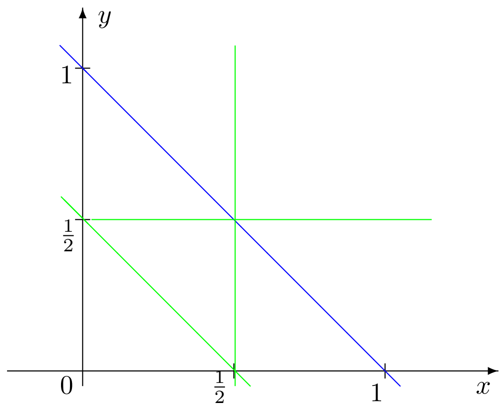
$\Omega = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, x + y < 1\}$

A jó eseteknek megfelelő pontokat tartalmazó halmazt jelöljük A-val!

a.) $A = \left\{(x,y) : x, y \ge 0,\ x < \frac{1}{2},\ y < \frac{1}{2},\ 1 - x - y < \frac{1}{2}\right\}$. Ábrázoljuk az összes pont halmazát és a jó pontok halmazát!

$x + y < 1 \quad \Rightarrow \quad y < 1 - x$ az eseménytérből

$1 - x - y < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y > \frac{1}{2} - x$

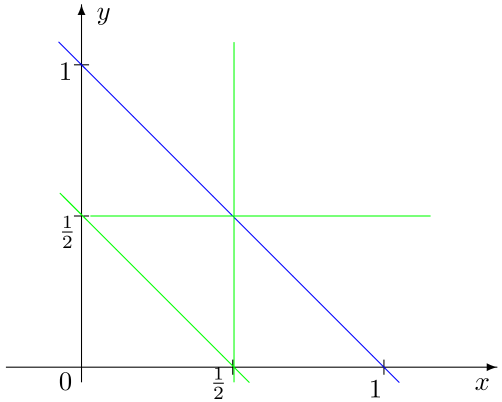


A zöld vonalak által határolt $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ háromszög az A halmaz, ennek területe könnyen láthatóan $\frac{1}{8}$. Az Ω a kék vonal alatti $(0,0), (1,0), (0,1)$ háromszög, ennek területe $\frac{1}{2}$.

Így a keresett valószínűség $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

b.) Akkor szerkeszthető háromszög, ha teljesül a három hosszra a háromszög-

egyenlőtlenség. Ez három egyenletet határoz meg. Így
$A = \{(x,y) : x, y \geq 0,\ x+y > 1-x-y,\ x+(1-x-y) > y,$
$y+(1-x-y) > x\}$.
Ábrázoljuk az összes pont halmazát és a jó pontok halmazát!
$x+y<1 \quad \Rightarrow \quad y<1-x$ az eseménytérből
$x+y>1-x-y \quad \Rightarrow \quad y > \frac{1}{2}-x$
$x+(1-x-y)>y \quad \Rightarrow \quad y<\frac{1}{2}$
$y+(1-x-y)>x \quad \Rightarrow \quad x<\frac{1}{2}$



A zöld vonalak által határolt $\left(\frac{1}{2},0\right), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(0,\frac{1}{2}\right)$ háromszög az A halmaz, ennek területe könnyen láthatóan $\frac{1}{8}$. Az Ω a kék vonal alatti $(0,0),(1,0),(0,1)$ háromszög, ennek területe $\frac{1}{2}$.

Így a keresett valószínűség $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

c.) $P(\min(x,y,1-x-y) < \frac{1}{5}) = 1 - P(\min(x,y,1-x-y) \geq \frac{1}{5}) =$
$1 - P(x \geq \frac{1}{5}, y \geq \frac{1}{5}, 1-x-y \geq \frac{1}{5}) = 1 - P(x \geq \frac{1}{5}, y \geq \frac{1}{5}, y \leq \frac{4}{5}-x)$
Ha ábrázoljuk a valószínűség belsejében lévő eseményt, akkor egy olyan háromszög adódik, aminek a csúcsai: $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right), \left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Ezáltal a keresett valószínűség $1 - \frac{\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

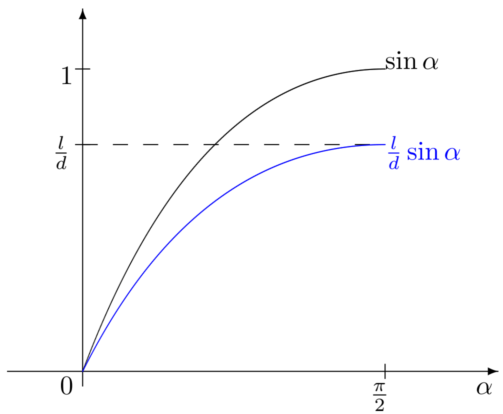
12.) Egy egységnyi hosszúságú pálcát előbb találomra ketté törünk, majd a hosszabbik darabot újra találomra ketté törjük. Mi a valószínűsége, hogy az így kapott 3 pálcából háromszög rakható össze?
Megoldás. A darabok: x és $1-x$. Tegyük fel, hogy $x > 1/2$, a másik esetre szimmetria miatt ugyanaz a valószínűség adódik.
Legyen $y \in (0,1)$ véletlen szám, így a 3 darab: yx, $x-yx$, $1-x$.
A három háromszög-egyenlőtlenség egy egyenes és két hiperbola-darab közti területet határol: $x > \frac{1}{2}$ és $y < \frac{1}{2x}$ és $y > 1 - \frac{1}{2x}$,
integrálással a terület: $\int\limits_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{2x} - \left(1-\frac{1}{2x}\right)\right] dx = \log 2 - \frac{1}{2}$,
így a keresett valószínűség $\frac{\log 2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\log 2 - 1$

13.) Buffon tűproblémája, 1777. A síkon egymástól d távolságra egyenesek vannak. Leejtünk a síkra egy l hosszúságú tűt. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a tű keresztezni fogja valamelyik egyenest, ha a tű

a.) rövid, azaz $l \leq d$;
b.) hosszú, azaz $l > d$.

Mennyi lesz ez a valószínűség, ha $l \to \infty$?
Megoldás.

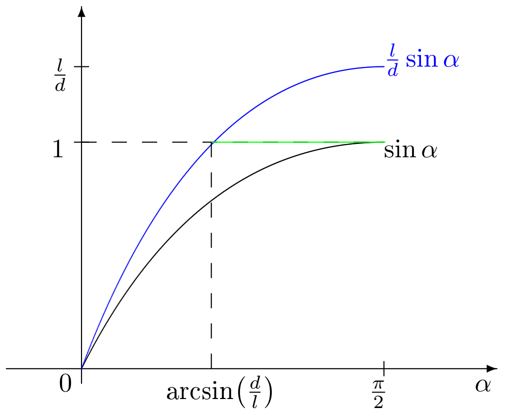
a.) Legyen $p = P$(a tű metsz egy egyenest).
Egy tűt egyértelműen meghatározza a kezdőpontjának a helye, valamint az egyenesekkel bezárt szöge, ez utóbbit jelöljük α-val. Húzzunk egy, az egyenesekre merőleges egyenest, amely mindegyik párhuzamos egyenest metszeni fogja. Elég ennek az új egyenesnek egy, valamelyik két egyenes közti d hosszú szakaszára koncentrálni. Vetítsük erre az egyenesre a tűt, a vetület hossza $l\sin\alpha$ lesz. Szimmetriai megfontolások miatt elég az $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tartománnyal foglalkozni. Vezessük be a következő jelölést:
$p(\alpha) = P$(adott α szög esetén a tű metszi az egyenest)
Ekkor könnyen látható, hogy $p(\alpha) = \frac{l\sin\alpha}{d}$, mivel akkor lesz metszés, ha a d hosszú szakasznak egy $l\sin\alpha$ hosszú részén van a tű kezdőpontja.
Ábrázoljuk a $p(\alpha)$ függvényt!



A keresett p valószínűség a $p(\alpha)$ függvény átlagos értéke, nem más, mint a kék görbe alatti terület, osztva az intervallum hosszával.

$$p = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} p(\alpha)\, d\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{d}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}\left[\cos\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$$

b.) Vegyük észre, hogy az $\frac{l}{d}$-vel megszorzott szinuszgörbe egy idő után nagyobb lesz 1-nél, onnantól kezdve le kell vágnunk.



$$p=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\min(p(\alpha),1)\,d\alpha}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)}\frac{l}{d}\sin\alpha\,d\alpha+\int\limits_{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)}^{\frac{\pi}{2}}1\,d\alpha\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left[\cos\alpha\right]^0_{\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}-\frac{l}{d}\cos\left(\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}-\frac{l}{d}\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}-\frac{l}{d}\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}-\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)$$

A limesz vizsgálatánál a zárójelen belüli első két tag a problémás, mivel limeszük ∞, és így ”$\infty-\infty$” adódna. Ez a probléma az alábbi beszorzással kiküszöbölhető:

$$\frac{l}{d}-\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}=\frac{\left(\frac{l}{d}-\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}\right)\left(\frac{l}{d}+\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}\right)}{\frac{l}{d}+\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}}=\frac{\frac{l^2}{d^2}-\left(\frac{l^2}{d^2}-1\right)}{\frac{l}{d}+\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}}=\frac{1}{\frac{l}{d}+\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}}$$

ennek a limesze pedig $l\to\infty$ esetén már 0. Így

$$\lim_{l\to\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}-\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right)=\frac{2}{\pi}\left(0+\frac{\pi}{2}-0\right)=1,$$

ez az eredmény pedig egybecseng az intuíciónkkal: egy hatalmas tű már szinte biztosan elmetszi az egyik egyenest.

14.) Egy hattagú társaság az étteremben három pacalpörköltet, két mátrai borzas csirkemellet, és egy böllér tálat rendel. A pincér a megrendelt ételeket véletlenszerűen osztja szét. Mennyi a valószínűsége, hogy

a.) mindenki azt kapja, amit rendelt;

b.) senki sem azt kapja, amit rendelt?

Megoldás.

a.) $\frac{1}{60}$

b.) $\frac{3}{60}$

15.) Gerike a Kinder csokoládéban lévő új játékokat, 'Shali baba' figurákat gyűjt. 10 különböző fajta ilyen baba van, mindegyik Kinder csokoládéba a 10 figura közül véletlenszerűen kerül egy. Gerike nagymamája tudja, hogy ez a gyerek álma, ezért karácsonyra a Jézuskától 20-at rendel a kisfiúnak. Tegyük fel, hogy Gerikének még nincs otthon Shali babája.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy Gerike mind a 10-féle Shali babát begyűjti?

b.) Mi a valószínűsége, hogy éppen a 20. tojás kinyitásánál gyűlik össze a kisfiúnak a 10. fajta baba?

Megoldás.

a.) Legyen A_i^j: a kapott j darab tojás egyikében ott van az i. baba, $i=1,\ldots,10$.
Legyen $p_j=P(j$ darab tojás kinyitása után az összes baba meglett$)$
Ebben a feladatrészben végig $j=20$-szal kell csak foglalkozni.
$p_{20}=P(A_1^{20}\cap A_2^{20}\cap\ldots\cap A_{10}^{20})=1-P(\overline{A}_1^{20}\cup\ldots\cup\overline{A}_{10}^{20})$
Alkalmazzuk a szita formulát! Ehhez
$S_{k,20}^{(10)}=\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le 10}P(\overline{A}_{i_1}^{20}\cap\ldots\cap\overline{A}_{i_k}^{20})=\binom{10}{k}P(\overline{A}_1^{20}\cap\ldots\cap\overline{A}_k^{20})=$
$=\binom{10}{k}P(\text{az első } k \text{ fajta babából egyik tojásban sincs példány})=\binom{10}{k}\left(\frac{10-k}{10}\right)^{20}$
Így már kiszámítható a keresett valószínűség:
$p_{20}=1-\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}S_{k,20}^{(10)}=1+\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\left(1-\frac{k}{10}\right)^{20}$

b.) Első megoldás:
Vegyük észre, hogy a keresett valószínűség $p_{20}-p_{19}$, mert p_{19} épp a "rossz" esetek valószínűségét tartalmazza, amikor már a 19., 18., … tojás kinyitása során összegyűlik a 10. fajta baba. Ez a valószínűség formálisan kifejezve:
$1+\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\left(1-\frac{k}{10}\right)^{20}-1-\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\left(1-\frac{k}{10}\right)^{19}=$
$\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\left[\left(1-\frac{k}{10}\right)^{20}-\left(1-\frac{k}{10}\right)^{19}\right]=\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\left(1-\frac{k}{10}\right)^{19}\left(-\frac{k}{10}\right)=$
$\sum\limits_{k=1}^{9}(-1)^{k+1}\binom{9}{k-1}\left(1-\frac{k}{10}\right)^{19}$
Második megoldás:
a keresett valószínűség $=P(19$ tojás kinyitása után pontosan 1 féle baba hiányzik és a 20. tojásban épp az van benne$)=$
$=P(\overline{A}_1^{19},\ldots,\overline{A}_{10}^{19}$ közül pontosan 1 következett be$)\cdot\frac{1}{10}$
Használjuk a Jordán-formulát $r=1$-re!
$\frac{1}{10}\sum\limits_{k=0}^{10-1}(-1)^k\binom{k+1}{1}S_{k+1,19}^{(10)}=\sum\limits_{k=0}^{9}(-1)^k\frac{k+1}{10}\binom{10}{k+1}\left(\frac{10-(k+1)}{10}\right)^{19}=$
$\sum\limits_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{9}{k}\left(\frac{9-k}{10}\right)^{19}$,
ami megegyezik az első megoldás végeredményével, csak a futóindex eggyel el van tolva.

16.) Levelet írtunk húsz barátunknak és a leveleket a megcímzett borítékokba véletlenszerűen tettük bele. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 10 levél kerül ahhoz, akinek szántuk?

Megoldás. Legyen A_i: az i. barátunk a neki címzett levelet kapja, $i = 1, \ldots, 20$. A kiszámítandó valószínűség:

$p := P(A_1, \ldots, A_{20}$ események közül pontosan 10 darab következik be$)$

Alkalmazzuk a Jordán-formulát! Ehhez

$S_k^{(20)} = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le 20} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \binom{20}{k} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) =$

$\binom{20}{k} P(k \text{ ember a neki címzettet kapja}) = \binom{20}{k}\frac{(20-k)!}{20!} = \frac{1}{k!}$

Így már kiszámítható a keresett valószínűség:

$p = \sum\limits_{k=0}^{20-10} (-1)^k \binom{10+k}{k} S_{10+k}^{(20)} = \sum\limits_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10+k}{k} \frac{1}{(10+k)!} = \frac{1}{10!} \sum\limits_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{1}{k!}$

17.) Mennyi a valószínűsége, hogy 20 ember közül van olyan hónap, amelyikben egyikük se született?

Megoldás. Tegyük fel, hogy a hónapok 30 naposak. Legyen A_i: született valaki az i. hónapban $i = 1, 2, \ldots, 12$. Ekkor a kiszámítandó valószínűség:

$p := P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_{12})$

Alkalmazzuk a szita formulát! Ehhez

$S_k^{(12)} = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le 12} P(\overline{A}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_k}) = \binom{12}{k} P(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_k) =$

$= \binom{12}{k} P(\text{az első } k \text{ hónapban senki se született}) = \binom{12}{k} \left(\frac{12-k}{12}\right)^{20}$

Így már kiszámítható a keresett valószínűség:

$p = \sum\limits_{k=1}^{12} (-1)^{k+1} S_k^{(12)} = \sum\limits_{k=1}^{12} (-1)^{k+1} \binom{12}{k} \left(1 - \frac{k}{12}\right)^{20}$

18.) $2N$ darab molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül N darab térrész valamelyikébe. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik térrészben lesz legalább egy molekula ?

Megoldás. Legyen A_i: az i. térrészben van molekula $i = 1, 2, \ldots, N$. Ekkor a kiszámítandó valószínűség:

$p := P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N) = 1 - P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_{12})$

Alkalmazzuk a szita formulát! Ehhez

$S_k^{(N)} = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N} P(\overline{A}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_k}) = \binom{N}{k} P(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_k) =$

$= \binom{N}{k} P(\text{az első } k \text{ térrészbe nem került molekula}) = \binom{N}{k} \left(\frac{N-k}{N}\right)^{2N}$

Így már kiszámítható a keresett valószínűség:

$p = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^k S_k^{(N)} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{2N}$

19.) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, ahol $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ és $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Rendeljünk az elemi eseményekhez olyan valószínűségeket, hogy az $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}$ események páronként függetlenek legyenek, de ne legyenek teljesen függetlenek!

Megoldás. $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$

20.) Egy k gyerekes családnál ($k \ge 1$) a fiú- és lánygyerek születésének valószínűsége minden gyereknél megegyezik. Tekintsük a következő eseményeket: A_k: a családban legfeljebb 1 lány van; B_k: minden gyerek egyforma nemű; C_k: legalább egy gyerek fiú. Milyen k-ra lesz

a.) A_k és B_k független;
b.) B_k és C_k független;
c.) A_k, B_k és C_k teljesen független?

Megoldás.

a.) $k = 1$ és $k = 3$ esetén
b.) $k = 1$ esetén
c.) $k = 1$ esetén

21.) Egy szekrényben 20 nadrág és 15 ing van. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszek 14 ruhát. Milyen k és l esetén lesznek függetlenek az alábbi események: A_k: összesen k darab inget húzok; B_l: az l-ediknek kihúzott ruhadarab ing?

Megoldás. $k = 6$ és tetszőleges pozitív egész l esetén

22.) Milyen $n>1$-re lesz független az a két esemény, hogy

a.) A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van;
b.) A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej?

Megoldás.

a.) $P(A) = P(\text{van fej és írás is}) = 1 - P(\text{csak az egyik van}) = 1 - 2P(\text{csak fej van}) = 1 - 2\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
$P(B) = P(\text{legfeljebb 1 írás van}) = P(\text{pontosan 0 írás van}) + P(\text{pontosan 1 írás van}) = \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}$
$P(A \cap B) = P(\text{pontosan 1 írás van}) = \frac{n}{2^n}$
n-re megoldandó a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ egyenlet, amiből $n + 1 = 2^{n-1}$ lesz. Könnyen látható, hogy az egyenlőség csak $n = 3$ esetén lesz igaz.

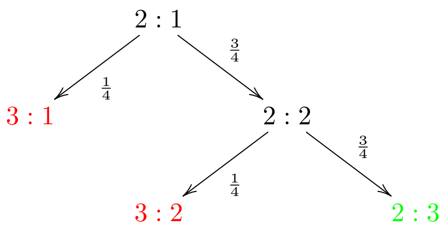
b.) $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
$P(B) = P(\text{az első fej}) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = P(\text{az első fej, a többiben van írás}) \overset{\text{függetlenek}}{=}$
$= P(\text{az első fej})P(\text{a többiben van írás}) = \frac{1}{2}(1 - P((n-1) \text{ fej}) =$
$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$
n-re megoldandó a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ egyenlet, amiből $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{2}$ lesz, ez pedig azonosság $\Rightarrow$ minden $n > 1$-re függetlenek.

23.) Osztozkodási probléma, 1494. Hogyan osztozzon az 1600 forintos téten két játékos, ha 2:1-es állásnál félbeszakadt a k győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy az egyes játékok egymástól függetlenek, az első játékos p valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál. Oldjuk meg a feladatot a következő esetekben:

a.) $k = 3$; $p = 1/4$
b.) $k = 4$; $p = 1/2$

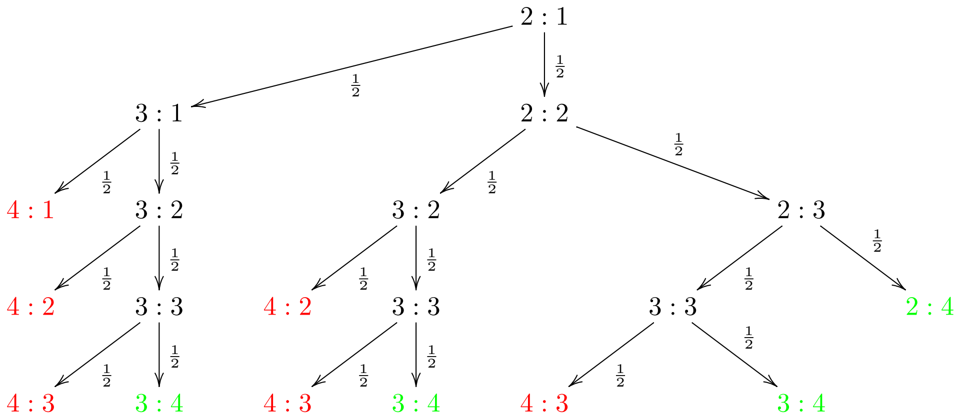
Megoldás.

a.) A játék menetét gráffal is lehet ábrázolni. Piros jelöli azt az állást, amikor az első játékos nyer, és zöld, amikor a második. Akkor osztozkodnak "igazságosan", ha a tét annyiad részét kapja az adott játékos, amennyi a nyerési esélye.



Mivel az egyes mérkőzéseket egymástól függetlenül játsszák le, ezért
$P(\text{a második játékos nyer}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.
Tehát úgy ossza fel a két játékos a tétet, hogy az első játékos kapja a tét $\frac{7}{16}$ részét, azaz 700 Ft-ot; a második pedig a tét $\frac{9}{16}$ részét, azaz 900 Ft-ot.

b.) Hasonló elven most is gráfot lehet készíteni.



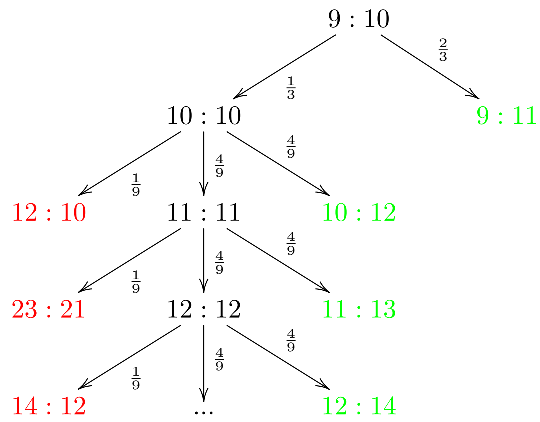
Mivel az egyes mérkőzéseket egymástól függetlenül játsszák le, ezért
P(a második játékos nyer)$=1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.
Tehát úgy ossza fel a két játékos a tétet, hogy az első játékos kapja a tét $\frac{11}{16}$ részét, azaz 1100 Ft-ot; a második pedig a tét $\frac{5}{16}$ részét, azaz 500 Ft-ot.

24.) Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 10:9 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 11 pontot szerezni.

Megoldás.

1. megoldás

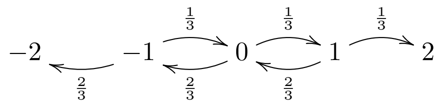
Az ábra mutatja a játék lehetséges kimeneteleit, Aladár:Béla sorrendben. A piros kimenetek azt mutatják, amikor Aladár nyert, a zöld azt, amikor Béla.



Az egyes labdamenetek egymástól függetlenek, így
P(Aladár nyer)$=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \ldots = \frac{1}{27} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k =$
$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{15}$.

2. megoldás

Készítsünk egy gráfot Aladár szemszögéből, jelölje az i csúcs azt, hogy az aktuális állás szerint Aladár i ponttal vezet. Tehát a kezdő 9:10-es állás (Aladár:Béla) a -1-es csúcsnak felel meg.



Jelölje $p_i = P(\text{az } i.\text{ csúcsban vagyunk és Aladár nyer})$, ahol $i = -2, -1, 0, 1, 2$.
Nyilván $p_{-2} = 0$ és $p_2 = 1$. A feladat megoldása a p_{-1} érték.
A teljes valószínűség tételével fel tudunk írni egyenleteket, ahol a teljes eseményrendszer mindig egy aktuális játék eredménye, tehát az, hogy Aladár győz, illetve Aladár veszít, ezek valószínűsége $\frac{1}{3}$, illetve $\frac{2}{3}$.
$p_{-1} = \frac{2}{3}p_{-2} + \frac{1}{3}p_0 = \frac{1}{3}p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = 3p_{-1}\ (*)$
$p_0 = \frac{2}{3}p_{-1} + \frac{1}{3}p_1 \quad \Rightarrow \quad 3p_0 = 2p_{-1} + p_1\ (**)$
$p_1 = \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_2 = \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3p_1 - 1 = 2p_0\ (***)$
Oldjuk meg az egyenletrendszert, ehhez $(*)$-ot beírjuk a másik kettőbe.
$9p_{-1} = 2p_{-1} + p_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 7p_{-1}$
$3p_1 - 1 = 6p_{-1} \quad \Rightarrow \quad 21p_{-1} - 1 = 6p_{-1} \quad \Rightarrow \quad p_{-1} = \frac{1}{15}$

25.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?
Megoldás. A feltétel figyelembe vételével oljuk meg: legalább az egyik 6-os összes eset: 16,61,12,26,36,63,46,64,56,65,66 $\longrightarrow$ 11 darab

jó esetek: 66 $\longrightarrow$ 1 darab
így a keresett valószínűség $\frac{1}{11}$.

26.) Négyen lőnek egymás után egy céltáblára. A résztvevők találati valószínűségei egymástól függetlenül, sorrendben $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$. Ketten érnek el találatot. Mi a valószínűsége, hogy a második hibázta el a lövést?
Megoldás. $\frac{11}{17}$

27.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?
Megoldás. Legyen A: egyikkel 6-ost dobunk; B: az összeg 12.
Írjuk össze az összes lehetséges esetet, amikor 3 kockadobás eredményének az összege 12:

12 felbontása	Esetek száma	Van-e 6-os
6+5+1	3!=6	igen
6+4+2	3!=6	igen
6+3+3	$\frac{3!}{2!}=3$	igen
5+5+2	$\frac{3!}{2!}=3$	nem
5+4+3	3!=6	nem
4+4+4	1	nem
Összesen	25	

Tehát a jó esetek száma: 6+6+3=15, az összes eset száma pedig 25, így a keresett $P(A|B)$ valószínűség $0,6$.

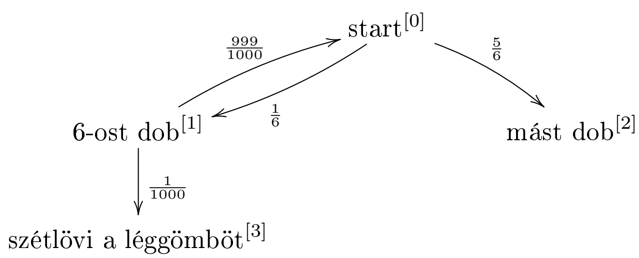
28.) Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?
Megoldás. Legyen A: nem kapunk fejet; B_i: i-t dobunk a kockával ($i = 1, \dots, 6$). Ekkor $B_1, \dots, B_6$ teljes eseményrendszert alkotnak, $P(B_i) = 1/6$.
$P(A|B_i)$=P(i darab érmedobásból nem kaptunk fejet)=$\left(\frac{1}{2}\right)^i$
Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:
$$P(A) = \sum_{j=1}^{6} P(A|B_j)P(B_j) = \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{128}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\frac{63}{64} = \frac{21}{128} \approx 16,4\%.$$

29.) 100 érme közül 10 cinkelt, ezeknél csak 1/4 a fejdobás valószínűsége. Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, k fejet kaptunk ($k = 0, 1, \dots, 10$). Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?
Megoldás. Legyen A: 10 dobásból k fej; B_1: jó érmével dobtunk; B_2: cinkelt érmével dobtunk.
$P(B_1) = \frac{9}{10}$ $\quad P(A|B_1) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}}$
$P(B_2) = \frac{1}{10}$ $\quad P(A|B_2) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\frac{3^{10-k}}{4^{10}}$
Alkalmazzuk a Bayes-tételt:
$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{\binom{10}{k}\frac{3^{10-k}}{4^{10}}\cdot\frac{1}{10}}{\binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{9}{10}+\binom{10}{k}\frac{3^{10-k}}{4^{10}}\cdot\frac{1}{10}} =$$
$$\frac{\frac{3^{10-k}}{4^{10}}}{\frac{9\cdot 2^{10}+3^{10-k}}{4^{10}}} = \frac{3^8}{2^{10}\cdot 3^k+3^8}$$

30.) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és 1/3 a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozd meg p értékét, ha 3/5 annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!
Megoldás. Legyen A: helyesen válaszolt; B: tudta a választ. Használjuk ki, hogy $B, \overline{B}$ teljes eseményrendszer.
$P(B) = p$ $\quad P(A|B) = 1$
$P(\overline{B}) = 1 - p$ $\quad P(A|\overline{B}) = \frac{1}{3}$
Alkalmazzuk a Bayes-tételt:
$$\frac{3}{5} = P(\overline{B}|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{3}\cdot(1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$$
Ezt átrendezve, $p = \frac{1}{3}$.

31.) Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2·2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?
Megoldás. Legyen A: igazat mondanak; B_1: Athénba jutott; B_2: Spártába jutott; B_3: Mükénébe jutott. $\Rightarrow$ B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer.
$P(B_1) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A|B_1) = \frac{1}{3}$
$P(B_2) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A|B_2) = 1$
$P(B_3) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A|B_3) = \frac{1}{2}$
Alkalmazzuk a Bayes-tételt:
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{11}.$$

32.) Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány hatost dobott egymás után egy dobókockával. Például ha elsőre hatost, másodikra kettest dob, akkor egyszer lőhet. Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha minden lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?
Megoldás. Készítsünk egy alkalmas ábrát, ami leírja a feladat menetét.



A csúcsokat a jobb felső szögletes zárójelben lévő szám jelöli.
Legyen $p_i = P($ az i. csúcsban van és szétlövi a léggömböt$)$.
A feladatban megfogalmazott kérdésre adandó válasz a p_0 valószínűség. Nyilvánvalóan

$p_2 = 0,\ p_3 = 1.$

A teljes valószűség tétele alapján felírható a következő egyenletrendszer:

$p_0 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{5}{6}\cdot 0 \qquad \Rightarrow \quad p_1 = 6p_0$

$p_1 = \frac{1}{1000}\cdot 1 + \frac{999}{1000}p_0 \qquad \Rightarrow \quad 6p_0 = \frac{1}{1000} + \frac{999}{1000}p_0$

$\Rightarrow \quad \frac{5001}{1000}p_0 = \frac{1}{1000} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{5001}$

33.) Két érmét dobálunk egyszerre, ezt addig ismételgetjük, amíg mindkettővel fejet nem kapunk. Amennyiben tudjuk, hogy párosadik alkalomra adódott először a dupla fej, akkor mi a valószínűsége, hogy a kísérlet befejezése előtt csupa írást kaptunk?

Megoldás.

Egy dupla kockadobás során $P(\mathrm{FF}) = P(\mathrm{II}) = \frac{1}{4}$

Legyen A_i: i. alkalomra jött ki először a dupla fej $i = 1, 2, \ldots$; B : az első dupla fej előtt csupa írást kaptunk

A kérdéses valószínűség: $P(B|A_2 \cup A_4 \cup \ldots) = \frac{P(B\cap(A_2\cup A_4\cup\ldots))}{P(A_2\cup A_4\cup\ldots)} =$

$$= \frac{P(B\cap A_2)+P(B\cap A_4)+\ldots}{P(A_2)+P(A_4)+\ldots} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(B\cap A_{2i})}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_{2i})} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2i-1}\frac{1}{4}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2i-1}\frac{1}{4}} = \frac{4\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^{i}}{\frac{4}{3}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{i}} = 3\frac{\frac{1}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{16}}}{\frac{9}{16}\frac{1}{1-\frac{9}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{7}{15} = \frac{7}{45}$$

34.) Két doboz közül az elsőben k piros és l zöld golyó van, a másodikban k zöld és l piros. Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó piros, akkor a következő húzásnál az első dobozból; ha zöld, akkor a második dobozból húzunk. Először az első dobozból húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az n. húzásál piros golyót húzunk? Mihez tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$?

Megoldás. Legyen p_n: az n. húzásnál piros golyót húzunk.

A feladat szövege alapján $p_1 = \frac{k}{k+l}$.

Vegyük észre, hogy az n. húzás eredménye attól függ, mit húztunk $n-1$.-re, használjuk a teljes valószínűség tételét:

$p_n = \frac{k}{k+l}p_{n-1} + \frac{l}{k+l}(1 - p_{n-1}) = \frac{k-l}{k+l}p_{n-1} + \frac{l}{k+l}$

A továbbiakban fontos lesz, vegyük észre, hogy $0 \leq \frac{k-l}{k+l} < 1$.

Fejtsük tovább a rekurziót és általánosítsunk, írjuk fel az első tagig, p_1-ig.

$$p_n = \frac{k-l}{k+l}p_{n-1} + \frac{l}{k+l} = \frac{k-l}{k+l}\cdot\left(\frac{k-l}{k+l}p_{n-2} + \frac{l}{k+l}\right) + \frac{l}{k+l} =$$

$$= \left(\frac{k-l}{k+l}\right)^2 p_{n-2} + \frac{k-l}{k+l}\frac{l}{k+l} + \frac{l}{k+l} = \ldots =$$

$$= \left(\frac{k-l}{k+l}\right)^{n-1} p_1 + \frac{l}{k+l}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{k-l}{k+l}\right)^i \xrightarrow{n\to\infty} 0 + \frac{l}{k+l}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{k-l}{k+l}\right)^i =$$

$$= \frac{l}{k+l}\frac{1}{1-\frac{k-l}{k+l}} = \frac{l}{k+l}\frac{1}{\frac{k+l-k+l}{k+l}} = \frac{1}{2}.$$

35.) A négy hazudós. Ismeretes, hogy A, B, C és D személyek egymástól függetlenül, három eset közül csak egy esetben mondanak igazat. Ha A kijelenti, hogy B tagadja, hogy C megerősíti, hogy D hazudott, akkor mi a valószínűsége, hogy D valójában igazat mondott? Tegyük fel, hogy C tudja, hogy D igazat mondott-e; B tisztában van azzal, C igazat mondott-e; A tudja, hogy B igazat mondott-e.

Megoldás. Definiáljuk a következő eseményeket:

I_D: D igazat mondott

I_C: C kijelenti, hogy D igazat mondott

I_B: B kijelenti, hogy D igazat mondott

I_A: A kijelenti, hogy D igazat mondott

Ekkor a feladat feltétele alapján

$P(I_D) = \frac{1}{3}$

$P(I_C|I_D) = \frac{1}{3}$; $P(\overline{I_C}|\overline{I_D}) = \frac{1}{3}$

$P(I_B|I_C) = \frac{1}{3}$; $P(\overline{I_B}|\overline{I_C}) = \frac{1}{3}$

$P(I_A|I_B) = \frac{1}{3}$; $P(\overline{I_A}|\overline{I_B}) = \frac{1}{3}$

A keresett valószínűség: $P(I_D|I_A)$, ugyanis az, hogy B tagadja, hogy C megerősíti, hogy D hazudott, a következőképp fogalmazható át: B kijelenti, hogy C szerint D igazat mondott

$P(I_D|I_A) = \frac{P(I_A\cap I_D)}{P(I_A)}$, ehhez $P(I_A \cap I_D)$ és $P(I_A)$ valószínűségeket még nem ismerjük.

Iteráljuk a teljes valószínűség tételét!

$$P(I_A) = P(I_A|I_B)P(I_B) + P(I_A|\overline{I_B})P(\overline{I_B}) = \frac{1}{3}P(I_B) + \frac{2}{3}(1 - P(I_B)) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}P(I_B) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left[P(I_B|I_C)P(I_C) + P(I_B|\overline{I_C})P(\overline{I_C})\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}P(I_C)\right] = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}P(I_C) =$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\left[P(I_C|I_D)P(I_D) + P(I_C|\overline{I_D})P(\overline{I_D})\right] = \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3})\right] = \frac{4}{9} + \frac{5}{81} = \frac{41}{81}$$

Szükség lesz a következő típusú valószínűségekre (I_B és I_C helyett azok komplementerére is ugyanígy igaz):

$P(I_A \cap I_B \cap I_C \cap I_D) = P(I_A|I_B \cap I_C \cap I_D) \cdot P(I_B|I_C \cap I_D) \cdot P(I_C|I_D) \cdot P(I_D) =$
$P(I_A|I_B) \cdot P(I_B|I_C) \cdot P(I_C|I_D) \cdot P(I_D)$

Így $P(I_A \cap I_D) = P(I_A \cap I_B \cap I_C \cap I_D) + P(I_A \cap I_B \cap \overline{I_C} \cap I_D) +$
$+ P(I_A \cap \overline{I_B} \cap I_C \cap I_D) + P(I_A \cap \overline{I_B} \cap \overline{I_C} \cap I_D) =$
$= P(I_A|I_B)P(I_B|I_C)P(I_C|I_D)P(I_D) + P(I_A|I_B)P(I_B|\overline{I_C})P(\overline{I_C}|I_D)P(I_D) +$
$+ P(I_A|\overline{I_B})P(\overline{I_B}|I_C)P(I_C|I_D)P(I_D) + P(I_A|\overline{I_B})P(\overline{I_B}|\overline{I_C})P(\overline{I_C}|I_D)P(I_D) =$
$= \frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} = \frac{13}{81}$

Így a keresett valószínűség $\frac{13}{41}$

36.) Legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ eseménytér, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$. Az alábbi függvények valószínűségi változók $(\Omega, \mathcal{A})$-n?

a.) $X(\{\omega_i\}) = i + 10 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

b.) $X(\{\omega_1\}) = \pi,\ X(\{\omega_2\}) = X(\{\omega_3\}) = X(\{\omega_4\}) = e$;

c.) $X(\{\omega_i\}) = |i - 2| \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

Amennyiben valamelyik nem valószínűségi változó, határozd meg azt a legszűkebb $\mathcal{F}$ σ-algebrát, hogy $(\Omega, \mathcal{F})$-en már valószínűségi változó legyen!

Megoldás.

a.) Nem valószínűségi változó, mert $X^{-1}(\{12\}) = \{\omega_2\} \notin \mathcal{A}$.
Az X valószínűségi változó által generált σ-algebrában könnyen láthatóan benne kell lennie minden egyelemű halmaznak, így $\sigma(X) = 2^{\Omega}$.

b.) Valószínűségi változó, mert $X^{-1}(\{\pi\}) = \{\omega_1\}$ és $X^{-1}(\{e\}) = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, ez a két halmaz által generált σ-algebra pedig éppen $\mathcal{A}$.

c.) Nem valószínűségi változó, mert $X^{-1}(\{2\}) = \{\omega_4\} \notin \mathcal{A}$.
$X^{-1}(\{0\}) = \{\omega_2\}$, $X^{-1}(\{1\}) = \{\omega_1, \omega_3\}$, így $\sigma(X) = \sigma(\{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_4\}) =$
$= \{\emptyset, \Omega, \{\omega_2\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}\}$.

37.) Legyenek A, B, C, D, egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra érünk vissza először A-ba. Írjuk fel X eloszlását! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

Megoldás. Írjuk fel a megoldást a valószínűség klasszikus képlete alapján:
$P(X=k) = \frac{3\cdot 2^{k-2}\cdot 1}{3^k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ $(k=2,3,\ldots)$, ugyanis

- legalább 2 lépésre van szükség, hogy visszaérjünk A-ba
- minden lépésben összesen 3 irányba haladhatunk, így az összes eset 3^k
- jó lépések: elsőként 3 helyre mehetünk, utána $(k-2)$ alkalommal 2 helyre, végül vissza kell lépni A-ba

Ez valószínűségi eloszlás, mivel

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X=k) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Egyébként könnyen látható, hogy $X \stackrel{d}{=} 1+\text{Geo}(\frac{1}{3})$.

38.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

Megoldás. Legyen X: fiúk száma. A feladat visszatevéses mintavételként kezelhető: $p=\frac{1}{2}$; a minta mérete 6 $\rightsquigarrow$ n=6 $\Rightarrow$ $X \sim \text{Bin}(6,\frac{1}{2})$

39.) Határozd meg X eloszlását, ha X: hagyományos lottóhúzásnál (90/5) a

a.) találatok száma;
b.) 3-mal oszthatók száma;
c.) legnagyobb kihúzott szám;
d.) k-adik legnagyobb kihúzott szám $(k=1,\ldots,5)$.

Mutassuk meg, hogy ezek valóban valószínűségi eloszlások!

Megoldás.

a.) $X \sim \text{HipGeo}(90,5,5)$
b.) $X \sim \text{HipGeo}(90,30,5)$
c.) $P(X=k) = \frac{\binom{k}{5}-\binom{k-1}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}}$, ahol $k=5,6,\ldots,90$

ugyanis ki kell választanunk 5 számot az első k-ból, viszont nem k lesz a legnagyobb, amennyiben az első $k-1$- ből választottuk ki őket, így ezeket a rossz eseteket le kell vonni.

Ez valószínűségi eloszlás, ugyanis

$$\sum_{k=5}^{90} p_k = \frac{\binom{5}{5}+(\binom{6}{5}-\binom{5}{5})+(\binom{7}{5}-\binom{6}{5})+\ldots+(\binom{90}{5}-\binom{89}{5})}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{90}{5}} = 1.$$

d.) $P(X=l) = \frac{\binom{l-1}{5-k}\cdot\binom{90-l}{k-1}}{\binom{90}{5}}$, ahol $l=1,2,3,4,5$

A számláló indoklása: fixáljuk le az l. számot, ez lesz a k. legnagyobb. Előtte van még $l-1$ szám, ezek közül kell $5-k$-t kiválasztani. Utána van $90-l$ szám, ezek közül pedig $k-1$-et kell kiválasztani.

40.) Véletlen bolyongás. Egy tétova hangya a számegyenesen bolyong. 0-ból indul és minden lépésnél egyforma valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lép. Legyen X: $2n$ lépés után a hangya melyik pontban lesz. Határozd meg X eloszlását!

Megoldás.
$P(X=k) = \frac{\binom{2n}{n+k/2}}{2^{2n}}$ $\qquad k=0,\pm2,\pm4,\ldots,\pm2n$
mivel

- páros sok lépés után csak páros helyeken lehet, viszont $\pm2n$-en túlra nem tud eljutni
- minden lépésben 2 irányba mehet, ezért az összes lépések száma $2n$ lépés után 2^{2n}
- 0-ból úgy tud eljutni k-ba, hogy k alkalommal biztosan jobbra ment, és a maradék $(2n-k)$-ból pedig a felét jobbra, a felét balra tette meg. Tehát összesen $k+\frac{2n-k}{2} = n+\frac{k}{2}$ alkalommal ment jobbra. Ebből adódik, hogy a jó esetek száma $\binom{2n}{n+k/2}$, mivel elég kiválasztani azokat a helyeket, ahol jobbra megy, a többi helyen már csak balra mehet.

41.) Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy egy évben legfeljebb egy ember lesz így öngyilkos?

Megoldás. Legyen X: egy év alatt hányan ölik magukat a Dunába. Az öngyilkosságok tipikusan ritka eseménynek tekinthetők, így $X \sim\text{Poi}(\lambda)$.
A feladat első mondata alapján $P(X=2) = 3\cdot P(X=5)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} = 3\frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$ $\Rightarrow$ $\lambda^3 = \frac{5!}{2\cdot3}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \sqrt[3]{20}$
$P(\text{legfeljebb egy ember lesz öngyilkos a Dunába}) = P(X\le1) =$
$= P(X=0)+P(X=1) = e^{-\sqrt[3]{20}}(1+\sqrt[3]{20})$.

42.) Egy sportlövő p valószínűséggel talál el egy léggömböt.

a.) Az első;
b.) az ötödik találatig lő.

Mi lövései számának eloszlása?

Megoldás.

a.) $\text{Geo}(p)$
b.) $\text{NegBin}(5,p)$

43.) Addig dobunk két kockával, amíg kétszer elő nem fordul az, hogy a két kockán lévő számjegyek összege 10.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?
b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 10-nél kisebb összeget, mielőtt a keresett esemény bekövetkezik?

Megoldás.

a.) Legyen X: dobások száma, míg kétszer elő nem fordul, hogy a két kockán lévő számjegyek összege 10.
$P(\text{az összeg} = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, mivel $10 = 5+5 = 6+4 = 4+6$
Így $X \sim\text{NegBin}(2,\frac{1}{12})$
A kérdésre adandó válasz: $P(X=8) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^6$

b.) $P(\text{az összeg} > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, mivel $11 = 6+5 = 5+6$ és $12 = 6+6$.
$P(\text{az összeg} < 10) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
Vegyük észre, hogy utolsóként mindig egy 10-es összegű dobásnak kell szerepelnie, előtte pedig 1 db 10-es összegűnek és 8 db 10-nél kisebb összegűnek. Ezen kívül 10-nél nagyobb összegűből bármennyi lehet, tehát 0,1,2,3,... darab. Ha lefixáljuk,

hogy k darab 10-nél nagyobb összegű szerepel, akkor az összes lehetséges sorrendet ismétléses permutációból kaphatjuk meg: $\frac{(k+1+8)!}{k!1!8!}$.
Tehát a keresett valószínűséget az alábbi végtelen összeg adja meg:

$$p := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+9)!}{k!8!} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{12}\right)^k$$

A szumma pontos kiszámításához deriváljuk néhányszor a geometriai sort és az összegét (a konvergenciatartományon, $(-1,1)$-en belül szabad).

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = (1-q)^{-2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = 2(1-q)^{-3} \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\dots(n-l+1)q^{n-l} = l!(1-q)^{-l-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{(1-q)^{-l-1}} = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{n!}{l!(n-l)!} q^{n-l} = \sum_{n=l}^{\infty} \binom{n}{l} q^{n-l} = \underline{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+l}{l} q^k},$$

ahol az utolsó egyenlőségnél a $k = n-l$ átindexelést hajtottuk végre.
Most térjünk vissza a keresett valószínűség kiszámításához, alakítsuk át úgy, hogy a most levezetett összegzést használni tudjuk:

$$p = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot \frac{(k+9)!}{k!8!\cdot 9} \left(\frac{1}{12}\right)^k = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 9 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+9}{9} \left(\frac{1}{12}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 9 \left(1-\frac{1}{12}\right)^{-9-1} = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 9 \left(\frac{12}{11}\right)^{10} = \frac{9}{121} \left(\frac{10}{11}\right)^8$$

44.) Számítsuk ki a kockadobás várható értékét és szórását, ha

a.) a kocka szabályos;
b.) a kocka szabálytalan: két 1-es, három 4-es, egy 6-os van rajta.

Megoldás. Legyen X a kockadobás eredménye.

a.) $P(X=i) = \frac{1}{6}$, így $EX = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+\dots+6}{6} = \frac{\frac{6\cdot 7}{2}}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$

$EX^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6} = \frac{91}{6}$

$D^2X = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12} \quad \Rightarrow \quad DX = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}$

b.) $P(X=1) = \frac{2}{6}$; $P(X=4) = \frac{3}{6}$; $P(X=6) = \frac{1}{6}$, így
$EX = 1\cdot\frac{2}{6} + 4\cdot\frac{3}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{10}{3}$
$EX^2 = 1\cdot\frac{2}{6} + 16\cdot\frac{3}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} = \frac{2+48+36}{6} = \frac{86}{6} = \frac{43}{3}$
$DX = \sqrt{\frac{43}{3} - \frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{29}}{3}$

45.) Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 db 100 000 Ft-os, és 100 db 1000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?
Megoldás. Legyen X a nyereményünk, ami most 4 értéket vehet fel különböző valószínűségekkel, amit a következő táblázat foglal össze:

x_i (Ft)	Darab	p_i
1.000.000	1	$\frac{1}{10.000}$
100.000	10	$\frac{1}{1000}$
1.000	100	$\frac{1}{100}$
0	9889	$\frac{9889}{100}$

EX=1.000.000 $\cdot \frac{1}{10.000}$ + 100.000 $\cdot \frac{1}{1000}$ + 1.000 $\cdot \frac{1}{100}$=100+100+10=210 Ft.

46.) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét és szórását!
Megoldás. Ekkor visszatevés nélküli mintavételezésről van szó, 90 számból 45 páros van, és 5 elemű mintát veszünk. Tehát $X \sim$Hipgeo$(90,45,5)$, így $EX = 5\cdot\frac{45}{90} = 2,5$.

47.) Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?
Megoldás. $P(\text{sikeres dobás}) = \frac{11}{36}$
Legyen X: n-ből a sikeres dobások száma
Ekkor nyilvánvaló, hogy $X \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{11}{36})$
$EX = \frac{11n}{36}$

48.) Egy 200 oldalas könyvben 20 sajtóliba található véletlenszerűen elszórva.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 100. oldalon több, mint egy ajtóhiba van?
b.) Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 100. oldalon?
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két hajtóhiba van?

Megoldás. Jelölje X_i valószínűségi változó a könyv i. oldalán a sajtóhibák számát. Ekkor X_i-k függetlenek, és mivel egy könyvben a sajtóhibák rendszerint ritkának mondhatók, ezekről feltehető, hogy Poisson eloszlásúak. Ha a teljes könyvben 20 hiba van, akkor egy oldalon átlagosan $\frac{20}{200} = 0,1$ sajtóhiba szerepel, így a Poisson eloszlás várható értékének képlete alapján $\lambda = 0,1$.

a.) $P(X_{100} > 1) = 1 - P(X_{100} = 0) - P(X_{100} = 1) = 1 - e^{-0,1} - 0,1e^{-0,1} =$
$1 - 1,1e^{-0,1} \approx 0,5\%$

b.) $p_k = P(X_{100} = k)$-t kell maximalizálni k szerint. Nézzük a $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ hányadosokat. Egy növekvő sorozatnál ez nagyobb 1-nél, egy csökkenőnél pedig kisebb 1-nél. Keressük meg azt a pontot, ahol ez egyenlő 1-gyel, aztán vizsgáljuk meg, hogy mely egész értékek között van és ezek közül melyiknél veszi fel a maximumot.

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\frac{0,1^{k+1}}{(k+1)!}e^{-0,1}}{\frac{0,1^k}{k!}e^{-0,1}} = \frac{0,1}{k+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0,1 = k+1 \quad \Rightarrow \quad k = -0,9$$

A maximum vagy -1-ben, vagy 0-ban van, de mivel X_{100} nem vesz fel pozitív valószínűséggel -1 értéket, ezért 0-ban van a maximum.

c.) Feltehető, hogy az egyes oldalakon lévő hibák száma független egymástól.
$P(X_{13} + X_{14} > 2) =$
$1 - P(X_{13}+X_{14} = 0) - P(X_{13}+X_{14} = 1) - P(X_{13}+X_{14} = 2) =$
$= 1 - P(X_{13}=0)P(X_{14}=0) - P(X_{13}=1)P(X_{14}=0) -$
$P(X_{13}=0)P(X_{14}=1) - P(X_{13}=2)P(X_{14}=0) -$
$P(X_{13}=0)P(X_{14}=2) - P(X_{13}=1)P(X_{14}=1) =$
$= 1 - e^{-0,1}e^{-0,1} - 0,1e^{-0,1}e^{-0,1} - e^{-0,1}0,1e^{-0,1} - \frac{0,1^2}{2}e^{-0,1}e^{-0,1} -$
$e^{-0,1}\frac{0,1^2}{2}e^{-0,1} - 0,1e^{-0,1}\cdot 0,1e^{-0,1} =$

$= 1 - e^{-0,2}(1 + 0,1 + 0,1 + 0,005 + 0,005 + 0,01) =$
$= 1 - 1,22e^{-0,2} \approx 0,1\%$

49.) n darab dobókockát egyszerre feldobunk.

a.) Hány dobókocka esetén lesz a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kapott számok között pontosan egy hatos van?

b.) Várhatóan mennyi lesz a dobott számok összege?

Megoldás.

a.) $p_n := P(n \text{ dobásból egy 6-os}) = \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \longrightarrow \max_n$

$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{5}{6}$

Ezt 1-re rendezve adódik, hogy $n = 5$ vagy $n = 6$ esetén lesz maximális a valószínűség.

b.) $3,5n$

50.) Átlagosan hányat kell dobnunk

a.) egy érmével, amíg fej és írás is lesz a dobások között?

b.) egy kockával, amíg minden szám kijön?

c.) egy kockával, amíg minden páros szám kijön?

Megoldás. Jelöljük a szükséges dobások számát X-szel.

a.) Az 1. dobás vagy F, vagy I. Az első esetben az a kérdés, hogy utána hányadikra fordul elő először, hogy I-t kapunk, míg a második esetben ugyanez a kérdés F-jel. Ezáltal X felbontható a következő módon $X = 1 + Y$, ahol $Y \sim$Geo$(1/2)$ (szabályos érme esetén). Ezáltal

$EX = 1 + EY = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$

b.) X felbontható a következő módon $X = 1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$, ahol Y_i: dobások száma, míg az i. különböző szám kijön.

Ekkor $Y_2 \sim$Geo$\left(\frac{5}{6}\right)$, $Y_3 \sim$Geo$\left(\frac{4}{6}\right)$, …, $Y_6 \sim$Geo$\left(\frac{1}{6}\right)$. Ezáltal

$EX = 1 + \frac{1}{\frac{5}{6}} + \frac{1}{\frac{4}{6}} + \frac{1}{\frac{3}{6}} + \frac{1}{\frac{2}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} = 14,7$

c.) X felbontható a következő módon $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$, ahol Y_i: dobások száma, míg az i. különböző páros szám kijön.

Ekkor $Y_1 \sim$Geo$\left(\frac{3}{6}\right)$, $Y_2 \sim$Geo$\left(\frac{2}{6}\right)$ és $Y_3 \sim$Geo$\left(\frac{1}{6}\right)$. Ezáltal

$\frac{1}{\frac{3}{6}} + \frac{1}{\frac{2}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} = 11$

51.) Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó, amiről ismertek: $EX = 8$, $DX = 2$. Határozd meg a $P(X < 16)$ valószínűséget!

Megoldás. $8 = np$

$4 = 2^2 = np(1-p)$

Elsőt másodikba téve $4 = 8(1-p) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ és $n = 16$ adódik

$P(X < 16) = 1 - P(X \geq 16) = 1 - P(X = 16) = 1 - \frac{1}{2^{16}}$.

52.) Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét és szórását!

Megoldás. Legyen Y: kockadobás eredménye, ennek eloszlása:

$P(Y = n) = \frac{1}{6}$ ahol $n = 1, \ldots, 6$

Először dobunk a kockával, és a kockadobás eredményétől függ, hányszor fogunk dobni az érmével, tehát

$P(X = k|Y = n) = P(n \text{ dobásból } k \text{ darab fej}) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$ ahol $6 \geq n \geq k \geq 0$

$p_k = P(X = k) \overset{TVT}{=} \sum_{n=k}^{6} P(X = k|Y = n)P(Y = n) = \sum_{n=k}^{6}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\frac{1}{6}$ ahol $k = 0, 1, \ldots, 6$

Ezek segítségével

$$EX = \sum_{k=0}^{6} kp_k = \sum_{k=0}^{6} k \sum_{n=k}^{6}\frac{1}{6}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\sum_{n=k}^{6} k\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \overset{(2)}{=} \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\frac{n}{2^n}2^{n-1} = \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{6} n = \frac{1}{12}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

$\overset{(1)}{=}$-nél felhasználtuk, hogy $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

$\overset{(2)}{=}$-nél a binomiális tételt használtuk $l = k - 1$ átparaméterezéssel:

$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$

Most nézzük a második momentumot, ami a szóráshoz szükséges:

$$EX^2 = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \overset{(3)}{=} \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\left[\frac{n(n-1)}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\right] \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\left[\frac{n(n-1)}{2^n}2^{n-2} + \frac{n}{2^n}2^{n-1}\right] = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\frac{n^2+n}{4} = \frac{1}{24}\left(\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6} + \frac{6\cdot 7}{2}\right) = \frac{112}{24} = \frac{14}{3}$$

$\overset{(3)}{=}$-nál felhasználtuk, hogy $k^2\binom{n}{k} = (k(k-1) + k)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1}$

$DX = \sqrt{\frac{14}{3} - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{77}{48}}$

53.) Egy szabálytalan érmével dobunk többször egymás után, jelölje p a fej valószínűségét. Legyen X az első, azonosakból álló sorozat hossza; Y a második, azonosakból álló sorozat hossza (ha pl. a dobássorozat FIIIF... akkor $X = 1$ és $Y = 3$). Számítsuk ki X és Y várható értékét és szórását!

Megoldás. Jelölje F a fejdobást, I az írást.

X pozitív egész értékeket vehet fel: $k = 1, 2, \ldots$-ra

$P(X = k) = P(\underbrace{F...F}_{\text{k db}}I...) + P(\underbrace{I...I}_{\text{k db}}F...) = (1-p)p^k + p(1-p)^k$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty}\left(kp^k(1-p) + k(1-p)^kp\right) = (1-p)p\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + +p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} =$$

$\frac{(1-p)p}{(1-p)^2} + \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$

Y pozitív egész értékeket vehet fel: $l = 1, 2, \ldots$-ra

$$P(Y = l) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = l, X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}[P(\underbrace{F...F}_{\text{k db}}\underbrace{I...I}_{\text{l db}}F) + P(\underbrace{I...I}_{\text{k db}}\underbrace{F...F}_{\text{l db}}I)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}[p^{k+1}(1-p)^l + p^l(1-p)^{k+1}] = p^2(1-p)^l\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} + p^l(1-p)^2\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} =$$

$= p^2(1-p)^l\frac{1}{1-p} + p^l(1-p)^2\frac{1}{p} = p^2(1-p)^{l-1} + p^{l-1}(1-p)^2$

$$EY = \sum_{l=1}^{\infty}\left(lp^2(1-p)^{l-1} + lp^{l-1}(1-p)^2\right) = p^2\sum_{l=1}^{\infty} l(1-p)^{l-1} + (1-p)^2\sum_{l=1}^{\infty} lp^{l-1} =$$

$p^2\frac{1}{p^2} + (1-p)^2\frac{1}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2.$

Hasonló számolásokkal adódnak a szórásnégyzetek is.

$D^2X = \frac{p}{(1-p)^2} + \frac{1-p}{p^2}$
$D^2Y = 2\frac{3p^2-3p+1}{p(1-p)}$

54.) Írd fel és ábrázold az eloszlásfüggvényt, ha X

a.) indikátorváltozó $p = 2/3$ paraméterrel;

b.) egy olyan kockadobás eredménye, ahol a kockán egy 2-es, két 4-es és három 5-ös van.

Megoldás.

a.) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

b.) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ \frac{1}{6} & 2 < x \le 4 \\ \frac{1+2}{6} & 4 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$

55.) Lehetnek-e egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényei a következő függvények? Ha igen, akkor van X-nek sűrűségfüggvénye? Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét.

a.) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{6} < x \end{cases}$

b.) $F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{6}{x}\right)^8 & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

c.) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{[x]}{2} & \text{ha } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{ha } 2 < x \end{cases}$

d.) $F(x) = \begin{cases} \exp\{(x-1)^3\} & \text{ha } x \le 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$

Megoldás.

a.) $F(x)$ eloszlásfüggvény, de nem létezik sűrűségfüggvénye, mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ne 1$, így F nem folytonos $\frac{\pi}{6}$-ban.

b.) $F(x)$ eloszlásfüggvény, és létezik sűrűségfüggvénye:
$f(x) = \begin{cases} \frac{6^8 \cdot 8}{x^9} & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

c.) $F(x)$ nem eloszlásfüggvény, mivel 1-ben és 2-ben nem balról folytonos (de jobbról folytonos).

d.) $F(x)$ eloszlásfüggvény, és létezik sűrűségfüggvénye:
$f(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 \exp\{(x-1)^3\} & \text{ha } x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

56.) Legyen $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ cx^3 & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$, ahol c valós paraméter.

a.) Mely c értékek esetén lesz $F(x)$ eloszlásfüggvény?

b.) $P(-1 < X < 1) =?$ $P(X \ge 3) =?$

c.) Mely c-re létezik sűrűségfüggvény? Határozd meg! $EX =?$ $DX =?$

Megoldás.

a.) $F(x)$-nek monoton növőnek kell lennie, ami csak akkor teljesül, ha $c \ge 0$. További korlátozást jelent c értékére, hogy az eloszlásfüggvény maximum 1 lehet, amit az $x = 3$-ban vesz fel a középső tartományon:
$1 \ge \max\limits_{x \in (0,3]} cx^3 = c \cdot 3^3 = 27c \Rightarrow c \le \frac{1}{27}$
Tehát $F(x)$ eloszlásfüggvény, ha $0 \le c \le \frac{1}{27}$

b.) $P(-1 < X < 1) = P(-\infty < X < 1) = F(1) = c$
$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - 27c$

c.) $c = \frac{1}{27}$ esetén van csak sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{ha } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

$EX = \frac{1}{9}\int\limits_0^3 x^3\,dx = \frac{3^4}{9 \cdot 4} = \frac{9}{4}$

$EX^2 = \frac{1}{9}\int\limits_0^3 x^4\,dx = \frac{3^5}{9 \cdot 5} = \frac{27}{5}$

$DX = \sqrt{\frac{27}{5} - \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{432-405}{16 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{27}{80}}$

57.) Legyen $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 9 \\ \frac{3a}{\sqrt{x}} + b & \text{ha } 9 < x \le 16 \\ 1 & \text{ha } 16 < x \end{cases}$, ahol a és b valós paraméterek.

a.) A paraméterek mely értékeire lehet F az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

b.) $P(8 < X < 11) =?$ $P(X < 9) =?$ $P(X \le 9) =?$

c.) A paraméterek mely értékeire lesz F abszolút folytonos? Határozd meg ekkor a sűrűségfüggvényt, valamint X várható értékét és szórását!

Megoldás.

a.) Kizárólag a monotonitást kell garantálni, a többi automatikusan teljesül. Először is, mivel $1/\sqrt{x}$ monoton csökkenő a kérdéses intervallumon, $a \le 0$-ra van szükség. Másrészt, 9-ben és 16-ban is ügyelni kell, hogy a függvény ne legyen 0-nál kisebb, illetve 1-nél nagyobb, ami 1-1 egyenlőtlenséget jelent: $a + b \ge 0$ és $3/4a + b \le 1$.

b.) $P(8 < X < 11) = F(11) - F(8) = 3a/\sqrt{11} + b$
$P(X < 9) = F(9) = 0$
$P(X \le 9) = F(9+) = a + b$

c.) Abszolút folytonossághoz kell: $a + b = 0$ és $3/4a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -4;\ b = 4.$
A sűrűségfüggvény: $f(x) = 6x^{-3/2}I(9 < x < 16)$
$EX = 12$
$DX = 2$

58.) Mely c-re lesz sűrűségfüggvény $f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{ha } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$?

Megoldás.
A $\sin(x)$ függvény előjelet vált a π helyen, így nincs olyan c, amire a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvény lenne – hiába érhető el megfelelő konstanssal, hogy az integrál 1 legyen.

59.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} cx^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

a.) Határozd meg a c értékét és X eloszlásfüggvényét!
b.) $P(X < -0,5) = ?$ $P(X < 0,5) = ?$ $P(X < 1,5) = ?$
c.) $D^2(X) = ?$

Megoldás.

a.) $1 = \int\limits_0^1 cx^4\,dx = c\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = c\frac{1}{5} \Rightarrow c = 5$

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \int\limits_0^x 5t^4\,dt = x^5 & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

b.) $P(X < -0.5) = F(-0,5) = 0$
$P(X < 0.5) = F(0,5) = 0,5^5$
$P(X < 1.5) = F(1,5) = 1$

c.) $EX = \int\limits_0^1 5x^5\,dx = 5\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$EX^2 = \int\limits_0^1 5x^6\,dx = 5\frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

$D^2X = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}$.

60.) Legyen X sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } 2 < x < c \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

a.) $c = ?$ $F(x) = ?$ $P(X > 3) = ?$ $P(X = e) = ?$
b.) $E(X) = ?$ $D(X) = ?$

Megoldás.

a.) $1 = \int\limits_0^2 \frac{x}{3}\,dx + \frac{c-2}{6} = \frac{2}{3} + \frac{c-2}{6} \quad \Rightarrow \quad c = 4$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int\limits_0^x \frac{t}{3}\,dt = \frac{x^2}{6} & 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{3} + \frac{x-2}{6} = \frac{x+2}{6} & 2 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

b.) $E(X) = \int\limits_0^2 \frac{t^2}{3}\,dt + \int\limits_2^4 \frac{t}{6}\,dt = \frac{17}{9}$

$E(X^2) = \int\limits_0^2 \frac{t^3}{3}\,dt + \int\limits_2^4 \frac{t^2}{6}\,dt = \frac{40}{9}$

$DX = \frac{\sqrt{71}}{9}$

61.) Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 5$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét!

Megoldás.

$$F_Z(z) = P(Z < z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \le 0 \\ \frac{z^2\pi}{5\pi} = \frac{z^2}{5} & \text{ha } 0 < z \le \sqrt{5} \\ 1 & \text{ha } z > \sqrt{5} \end{cases}$$

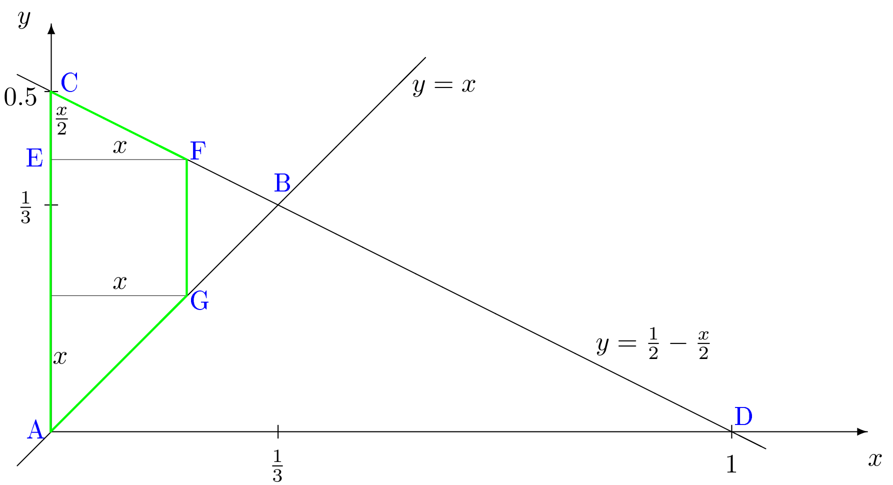
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2z}{5} & \text{ha } 0 < z \le \sqrt{5} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$EZ = \int\limits_0^{\sqrt{5}} \frac{2z^2}{5} = \frac{2}{5}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

62.) Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk két pontot, így a szakaszt rövidebb szakaszokra bontjuk. Jelölje X a kapott szakaszok közül a legrövidebbet. Írd fel X eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, valamint számítsd ki X várható értékét!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \dots & \text{ha } 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1 & \text{ha } \frac{1}{3} < x \end{cases}$.

Tehát elég már csak akkor kiszámítani a $P(X < x)$ valószínűséget, ha $0 < x \le \frac{1}{3}$. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben az x tengelyen a legrövidebb szakaszt, y tengelyen pedig a második legrövidebb szakaszt. Az összes esetnek megfelelő területet a következő egyenlőtlenségek határozzák meg: $x \le y \le 1 - x - y$. A második egyenlőtlenség y-ra átrendezve: $y \le \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.



A jó esetnek megfelelő alakzat a zöld AGFC trapéz, az összes esetnek megfelelő alakzat pedig az ABC háromszög. Mivel EFC háromszög hasonló ADC háromszöghöz, ezért EC szakasz hossza $\frac{x}{2}$.

t(ABC)$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{12}$

t(GBF)$=\frac{(\frac{1}{3}-x)\cdot(\frac{1}{2}-x-\frac{x}{2})}{2}=\frac{(1-3x)(1-3x)}{12}=\frac{1-6x-9x^2}{12}$

Így $P(X<x)=\frac{\frac{1}{12}-\frac{1-6x-9x^2}{12}}{\frac{1}{12}}=6x-9x^2$

Ebből $f_X(x)=\begin{cases}6-18x & \text{ha } 0<x\le\frac{1}{3}\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$

$EX=\int\limits_0^{\frac{1}{3}}(6x-18x^2)\,dx=[3x^2-6x^3]_0^{\frac{1}{3}}=3\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}.$

63.) Legyenek $X_1\sim N(2,3^2)$ és $X_2\sim N(4,4^2)$ függetlenek.

a.) $P(1\le X_1<3)=?$

b.) Számítsuk ki b értékét, hogy $P(X_1\ge b)=0,7$ teljesüljön!

c.) $P\left(\frac{X_1-X_2}{2}>0\right)=?$

Megoldás.

a.) $P(1\le X_1<3)=P\left(\frac{1-2}{3}\le N(0,1)<\frac{3-2}{3}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=$
$=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-1\approx 2\cdot 0,6306-1=0,2611$

b.) $0,7=P(X_1\ge b)=1-\Phi\left(\frac{b-2}{3}\right)\quad\Rightarrow\quad\Phi\left(\frac{b-2}{3}\right)=0,3\quad\Rightarrow\quad b=3\Phi^{-1}(0,3)+2$
$\Phi^{-1}(0,3)=-\Phi^{-1}(0,7)=-0,5244$, így
$b=3\cdot(-0,5244)+2=0,4268$

c.) $X_1-X_2=X_1+(-X_2)\sim N(2-4;3^2+4^2)=N(-2;5^2)$
$\frac{1}{2}(X_1-X_2)\sim N\left(-1;\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$, így
$P\left(\frac{X_1-X_2}{2}>0\right)=1-\Phi\left(\frac{0-(-1)}{\frac{5}{2}}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{5}\right)\approx 0,3446$

64.) Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

Megoldás. Legyen X: egy egyetemista IQ-pontja $\quad\Rightarrow\quad X\sim N(105,10^2)$
$P(X>120)=1-P(X<120)=1-P\left(\frac{X-105}{10}<\frac{120-105}{10}\right)=$
$=1-\Phi(1,5)=1-0,9332=4,68\%.$

65.) Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

Megoldás. Legyen X: a termékek élettartama $\quad\Rightarrow\quad X\sim N(10,2^2)$
Jelölje a garanciaidőt t
A feladat szövege alapján $0,1\ge P(X<t)$
$P(X<t)=P\left(\frac{X-10}{2}<\frac{t-10}{2}\right)=\Phi\left(\frac{t-10}{2}\right)$
Átrendezve t-re: $t\le 2\cdot\Phi^{-1}(0,1)+10=2\cdot(-\Phi^{-1}(0,9))+10=-2\cdot 1,28+10=7,44$
Tehát legfeljebb 7 év garanciát kell adnunk (ha a garanciaidő csak egész szám lehet).

66.) Egy vállalatnál a szellemi foglalkozásúak teszik ki a dolgozók 60%-át, az ő fizetésük eloszlása (ezer Ft-ban) $Z+150$, ahol $Z\sim\text{Exp}\left(\frac{1}{200}\right)$; a fizikai dolgozóé pedig $Y+100$, ahol $Y\sim\text{Exp}\left(\frac{1}{100}\right)$.

a.) Mi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szellemi foglalkozású többet keres 450 ezer Ft-nál?

b.) Egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó átlagosan mennyit keres?

Megoldás.

a.) $P(Z+150>450)=P(Z>300)=e^{-\frac{300}{200}}=e^{-3/2}\approx 22,31\%$

b.) $E[0,6(Z+150)+0,4(Y+100)]=0,6(200+150)+0,4(100+100)=290$

67.) Legyen X diszkrét valószínűségi változó az alábbi eloszlással: $P(X=i)=\frac{1}{6}$, ahol $i=-2,-1,0,1,2,3$.

a.) Határozd meg $Y=X^2$ eloszlását és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(X^2)=(EX)^2$?

b.) Igaz-e, hogy $E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{EX}$?

Megoldás.

a.) Y eloszlása: $P(Y=0)=\frac{1}{6}$; $P(Y=1)=\frac{2}{6}$; $P(Y=4)=\frac{2}{6}$; $P(Y=9)=\frac{1}{6}$.
$EY=EX^2=\frac{2+8+9}{6}=\frac{19}{6}\neq(EX)^2=\frac{1}{4}$

b.) $E\left(\frac{1}{X}\right)$ nem véges az $\frac{1}{0}$ tag miatt, így nem is lehet egyenlő $\frac{1}{EX}=\frac{1}{1/2}=2$-vel.

68.) Legyen $X\sim\text{Bin}(n,p)$. Határozd meg $\frac{1}{X+1}$ várható értékét!

Megoldás.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$
$$=\frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k}=\frac{1}{p(n+1)}\left(1-(1-p)^n\right)$$

69.) Határozd meg $Y=-\log(X)$ sűrűségfüggvényét, ha X valószínűségi változó

a.) exponenciális eloszlású;

b.) egyenletes eloszlású az (a,b) intervallumon.

Megoldás.

Vezessük le általánosan a sűrűségfüggvényt arra az esetre, amikor a sűrűségfüggvény nem nulla. Hogy hol nem nulla a sűrűségfüggvény, azt eloszlásonként kell külön-külön megvizsgálni.

$Y:=-\log(X)$
$F_Y(y)=P(Y<y)=P(-\log(X)<y)=P(X>e^{-y})=1-F_X(e^{-y})$
Ha X abszolút folytonos, akkor $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=e^{-y}f_X(e^{-y})$

a.) $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0\\ 0 & \text{ha } x\le 0\end{cases}$
X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $x>0\quad\Rightarrow\quad\log(x)\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad y=-\log(x)\in\mathbb{R}$
Így a keresett sűrűségfüggvény:
$f_Y(y)=e^{-y}\cdot\lambda e^{-\lambda e^{-y}}\qquad y\in\mathbb{R}$

b.) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x<b\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$
X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $a<x<b\quad\Rightarrow$
$\Rightarrow\quad\log(a)<\log(x)<\log(b)\quad\Rightarrow\quad -\log(a)>y=-\log(x)>-\log(b)$
Így a keresett sűrűségfüggvény:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}\frac{1}{b-a} & \text{ha } -\log(b) < y < -\log(a) \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \qquad a > 0.$$

70.) Legyen $X \sim E(-1,1)$ és $Y = 2^X$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét! Igaz-e, hogy $E(2^X) = 2^{EX}$?

Megoldás. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$F_Y(y) = P(2^X < y) = P(X \log 2 < \log y) = F_X(\frac{\log y}{\log 2})$

$f_Y(y) = \frac{1}{y \log 2} f_X\left(\frac{\log y}{\log 2}\right)$

X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 2^{-1} < y = 2^x < 2$

Tehát Y sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y \log 2} & \frac{1}{2} < y < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$E2^X = \int_{-1}^{1} 2^x \frac{1}{2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2\log 2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4\log 2} \neq 2^{EX} = 2^0 = 1$$

71.) Legyen $X \sim N(2,1)$ és $Y = X^5$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

Megoldás. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$

$F_Y(y) = P(X^5 < y) = F_X(y^{1/5})$

$f_Y(y) = \frac{1}{5} y^{-4/5} f_X(y^{1/5})$

X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = x^5 \in \mathbb{R}$

Tehát Y sűrűségfüggvénye:

$f_Y(y) = \frac{1}{5y^{4/5}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^{1/5}-2)^2}{2}} \quad y \in \mathbb{R}$

A várható értékhez használjuk fel, hogy $X - 2 \quad N(0,1^2)$ eloszlású, aminek a pozitív egész momentumait ismerjük.

$EX^5 = E(X-2+2)^5 = E(X-2)^5 + 5E(X-2)^4 2 + 10E(X-2)^3 4 + 10E(X-2)^2 8 + 5E(X-2)16 + 32 = 0 + 10 \cdot 3!! + 0 + 80 + 0 + 32 = 142$

72.) Legyen $X \sim N(0,1)$. Adjuk meg

a.) $Y = \sigma X + m$, ahol $\sigma > 0$ és m valós számok;
b.) $Y = e^{tX}$, ahol $t \in \mathbb{R}$;
c.) $Y = X^2$.

sűrűségfüggvényét és várható értékét. $P(Y < 1) =$?

Megoldás. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$

a.) $F_Y(y) = P(\sigma X + m < y) = P\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)$ X sfve nem 0, ha $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = \sigma x + m \in \mathbb{R}$

Tehát Y sűrűségfüggvénye: $F_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$, azaz $Y \sim N(m, \sigma^2)$

$EY = m$

$P(Y < 1) = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} < \frac{1-m}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{1-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right)$.

b.) Tegyük fel, hogy $t \neq 0$, mert ekkor Y elfajuló.

$F_Y(y) = P(e^{tX} < y) = P(X < \frac{1}{t}\log y) = F_X(\frac{1}{t}\log y)$

$f_Y(y) = \frac{1}{ty} f_X(\frac{1}{t}\log y)$

X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = e^{tx} \in (0, \infty)$

$$\text{Így } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{ty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{t}\log(y))^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}ty} e^{-\frac{\log^2(y)}{2t^2}} & \text{ha } y > 0 \\ 0 & \text{ha } y \leq 0 \end{cases}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\cdot 1^2}}}_{N(t,1) \text{ sűrűségfüggvénye}} dt = e^{t^2/2}$$

$P(Y < 1) = P(e^{tX} < 1) = P(X < \frac{1}{t}\log 1) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

c.) $F_Y(y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = 2F_X(\sqrt{y}) - 1$

$f_Y(y) = 2\frac{1}{2} y^{-1/2} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$

X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = x^2 \in [0, \infty)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$EY = EX^2 = D^2X + E^2X = 1 + 0 = 1$

$P(Y < 1) = 2\Phi(1) - 1$.

73.) Legyen $X \sim E(-1,2)$ és $Y = |X - 1|$. Határozd meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!

Megoldás. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$F_Y(y) = P(|X-1| < y) = P(-y < X - 1 < y) = F_X(1+y) - F_X(1-y)$

$f_Y(y) = f_X(1+y) + f_X(1-y)$

X sűrűségfüggvénye nem 0, ha $-1 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < y = |x-1| < 2$

Vegyük észre, hogy $Y = |X - 1|$ nem monoton függvény, 1-ig monoton csökkenő, 1 után pedig monoton növő. A minket érdeklő tartomány a $(-1,2)$ halmaz, ami nem szimmetrikus az 1-re, ezért további szétbontásra lesz szükség az $y \in (0,2)$ intervallumban. Ezt megtehetjük ábrázolás útján vagy a fenti f_Y egyes tagjainak vizsgálatával. Nézzük az utóbbi módszerrel:

$f_X(1+y)$ nem 0, ha $-1 < 1+y < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < y < 1$

$f_X(1-y)$ nem 0, ha $-1 < 1-y < 2 \quad \Rightarrow \quad 2 > y > -1$

Természetesen $y > 0$ esetén érdekes ezeket tekinteni, ebből kiderül, hogy az első tag csak a $(0,1)$ intervallumon nem 0, így a $(0,2)$ intervallumot $(0,1)$ és $(1,2)$ részekre kell bontani.

Tehát a keresett sűrűségfüggvény:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(1+y) + f_X(1-y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} & 0 < y < 1 \\ f_X(1-y) = \frac{1}{3} & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

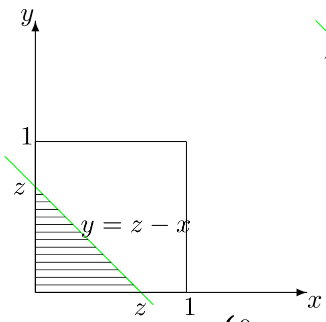
$$EY = \int_0^1 \frac{2y}{3}\, dy + \int_1^2 \frac{y}{3}\, dy = \left[\frac{y^2}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{6}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4-1}{6} = \frac{5}{6}$$

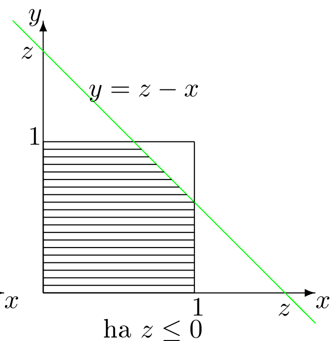
74.) Egy egységnégyzetből válasszunk ki egy tetszőleges pontot, jelölje X és Y a kiválasztott pont két koordinátáját.

a.) $U = X + Y$
b.) $U = -\log(XY)$

Határozd meg U eloszlás-, sűrűségfüggvényét és várható értékét!
Megoldás.

a.) Mivel X, Y 0 és 1 közötti számok, ezért $X + Y$ 0 és 2 között lesz. $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) = P(Y < z - X)$. Ábrázolva az $y = z - x$ egyenest az egységnégyzetben, az alatta lévő térrész felel meg a jó eseteknek. Látható, hogy a jó esetek valószínűségének kiszámítását ketté kell bontani aszerint, hogy $z < 1$ vagy $z > 1$.
$z < 1$ esetén $P(Y < z - X) = \frac{\frac{z^2}{2}}{1} = \frac{z^2}{2}$
$z > 1$ esetén $P(Y < z - X) = \frac{1 - \frac{(2-z)^2}{2}}{1} = 2z - 1 - \frac{z^2}{2}$, ugyanis a komplementer egyenlő szárú derékszögű háromszög oldala: $1 - (z - 1) = 2 - z$.



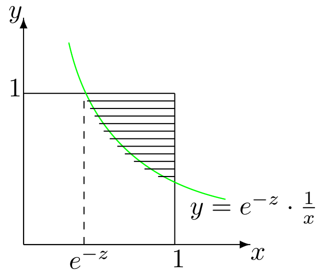


Tehát $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{ha } 0 < z \leq 1 \\ 2z - 1 - \frac{z^2}{2} & \text{ha } 1 < z \leq 2 \\ 1 & \text{ha } 2 < z \end{cases}$

Ebből $f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{ha } 0 < z \leq 1 \\ 2 - z & \text{ha } 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

$EZ = \int\limits_0^1 z\,dz + \int\limits_1^2 (2 - z)\,dz = 1.$

b.) Mivel X, Y 0 és 1 közötti számok, ezért $-\log(XY)$ 0 és ∞ között lesz. $F_Z(z) = P(Z < z) = P(-\log(XY) < z) = P(Y > e^{-z}\frac{1}{X})$. Ábrázolva az $y = e^{-z}\frac{1}{x}$ egyenest az egységnégyzetben, a felette lévő térrész felel meg a jó eseteknek.



A kérdéses terület integrálással számítható ki:
$\int\limits_{e^{-z}}^{1} \left(1 - e^{-z}\frac{1}{x}\right) dx = [x - e^{-z}\log(x)]_{x=e^{-z}}^{x=1} =$
$= 1 - (e^{-z} - e^{-z} \cdot (-z)) = 1 - e^{-z} - ze^{-z}$

Tehát $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 0 \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z} & \text{ha } 0 < z \end{cases}$

Ebből $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 0 \\ e^{-z} - e^{-z} + ze^{-z} = ze^{-z} & \text{ha } 0 < z \end{cases}$

$EZ = \int\limits_0^\infty z^2 e^{-z}\,dz = \left[-z^2 e^{-z}\right]_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty ze^{-z}\,dz = 2.$

75.) Adjunk meg olyan X valószínűségi változót, amire

a.) $X \overset{d}{=} -X$, azaz X és $-X$ ugyanolyan eloszlású;
b.) $X \overset{d}{=} X + 1$;
c.) $X \overset{d}{=} \frac{1}{X}$;

Megoldás.

a.) Ekkor minden x-re teljesülnie kell annak, hogy $P(X < x) = P(-X < x)$, azaz $P(X < x) = P(X > -x)$. Bármilyen, a 0-ra szimmetrikus eloszlás rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ilyen például a standard normális eloszlás.

b.) Ekkor minden x-re teljesülnie kell annak, hogy $P(X < x) = P(X + 1 < x)$, tehát az eloszlásfüggvényre $F(x) = F(x - 1)$-nek kell igaznak lennie minden x esetén. Azonban ilyen tulajdonságú függvény nem lehet eloszlásfüggvény (a határérték nem tud egyszerre 0 lenni $x \to -\infty$ és 1 lenni $x \to \infty$ esetén), így nem létezik ilyen eloszlás.

c.) Ekkor minden x-re teljesülnie kell annak, hogy $P(X < x) = P(\frac{1}{X} < x)$, tehát az eloszlásfüggvényre $F(x) = 1 - F(\frac{1}{x})$-nek kell igaznak lennie. Ezt deriválva, a sűrűségfüggvényre teljesülnie kell az $f(x) = \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})$ egyenlőségnek. Például ilyen függvény a következő: $f(x) = \frac{1}{x}$, de még arról is gondoskodni kell, hogy sűrűségfüggvény legyen.
Egy függvény tartójának hívjuk azt a halmazt, ahol az 0-tól különböző értéket vesz fel. A feltétel miatt $f(x)$ tartójának szimmetrikusnak kell lennie a reciprok függvényre, azaz $\{\frac{1}{c} < x < c\}$ alakúnak kell lennie valamely c valós konstansra. A sűrűségfüggvénynek nemnegatívnak kell lennie, így szükséges, hogy $c > 1$ teljesüljön. Továbbá az integráljának meg kell egyezni 1-gyel:

$1=\int\limits_{\frac{1}{c}}^{c}\frac{1}{x}dx=\log c-\log(\frac{1}{c})=2\log c \quad\Rightarrow\quad c=e^{1/2}$

Tehát a keresett tulajdonságú valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)=\frac{1}{x}I(\frac{1}{\sqrt{e}}<x<\sqrt{e})$.

76.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók; N nemnegatív egész, X_i-ktől független val. változó. Legyen $Y=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i$ (*véletlen* tagszámú összeg). Bizonyítsuk be, hogy

a.) $EY=EX_1\cdot EN \rightsquigarrow$ **Wald-lemma**;

b.) $D^2Y=D^2X_1\cdot EN+E^2X_1\cdot D^2N$.

Megoldás.

a.) $EY=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\left(\sum\limits_{i=1}^{N}X_i\middle| N=n\right)P(N=n)=$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)P(N=n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nEX_1\cdot P(N=n)=$

$=EX_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}nP(N=n)=EX_1\cdot EN$

b.) $EY^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\left(\sum\limits_{i=1}^{N}X_i\middle| N=n\right)^2P(N=n)=$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)^2P(N=n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[nEX_1^2+(n^2-n)E^2X_1]\cdot P(N=n)=$

$=EX_1^2\cdot EN+E^2X_1\cdot(EN^2-EN)$

$D^2Y=EX_1^2\cdot EN+E^2X_1\cdot(EN^2-EN)-E^2X_1\cdot E^2N=$

$=EX_1^2\cdot EN-E^2X_1\cdot EN+E^2X_1\cdot EN^2-E^2X_1\cdot E^2N=$

$=D^2X_1\cdot EN+E^2X_1\cdot D^2N$

77.) Egy dobozban az 1,2,3,4 feliratú 4 cédula van. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 4-es nem kerül a kezünkbe. Határozzuk meg a kihúzott számok összegének a várható értékét és szórását!

Megoldás.

A várható érték kiszámítására 3 megoldást is írunk, a szórására egyet, a harmadik megoldásban.

1. megoldás

Legyen X: a húzott számok összege.

Legyen Y: húzások száma, míg 4-est kapunk, ekkor nyilvánvalóan $Y\sim$Geo$(\frac{1}{4})$.

Alkalmazzuk a teljes várható érték tételt:

$EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}E(X|Y=i)P(Y=i)$

Vizsgáljuk meg az $\{X|Y=i\}$ eseményt! Ekkor az utolsó, i.-nek kihúzott cédulának 4-esnek kell lennie, az előző, $i-1$ kihúzott cédula pedig bármi lehet a 4-esen kívül. Ezek az 1-es, 2-es és 3-asok, azonos valószínűséggel kaphatjuk meg őket. Jelöljük Z_j-vel azokat a valószínűségi változókat, amik azonos, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel veszik fel ezen értékeket, azaz $P(Z_j=k)=\frac{1}{3}\quad k=1,2,3,\quad j=1,2,\ldots,i-1$, amik a feladat szövege miatt egymástól függetlenek. Ezek közös várható értéke $EZ_1=2$, segítségükkel pedig felírható a keresett feltételes várható érték. Így

$EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}[EZ_1+EZ_2+\ldots+EZ_{i-1}+4]\cdot P(Y=i)=$

$=\sum\limits_{i=1}^{\infty}[2(i-1)+4]\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}[2i+2]\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}=$

$=2\sum\limits_{i=1}^{\infty}iP(Y=i)+2\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(Y=i)=2EY+2=8+2=10$

2. megoldás

Legyen U: az elsőnek húzott cédula. Használjuk a teljes várható érték tételt.

$EX=E(X|U{=}1)P(U{=}1)+E(X|U{=}2)P(U{=}2)+E(X|U{=}3)P(U{=}3)++E(X|U{=}4)P(U{=}4)=(1+EX)\frac{1}{4}+(2+EX)\frac{1}{4}+(3+EX)\frac{1}{4}+4\frac{1}{4}$

Ez egy egyenlet EX-re, amit megoldva, $EX=10$ adódik.

3. megoldás

Használjuk a Wald-lemmát! Ehhez vegyük észre, hogy X egy véletlen tagszámú összegként írható fel a következőképpen: $X=\sum\limits_{i=1}^{Y-1}Z_i+4$, ahol Y és Z_i-k az 1. megoldásban definiált valószínűségi változók. Így

$EX=EZ_1\cdot E(Y-1)+4=2\cdot(4-1)+4=10$

$DX=\sqrt{D^2\left(\sum\limits_{i=1}^{Y-1}Z_i+4\right)}=\sqrt{D^2\left(\sum\limits_{i=1}^{Y-1}Z_i\right)}=$

$=\sqrt{D^2Z_1E(Y-1)+D^2(Y-1)E^2Z_1}=$

$=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot(4-1)+12\cdot 4}=\sqrt{2+48}=5\sqrt{2}$

78.) Addig dobunk egy szabályos kockával, míg 6-ost nem kapunk. Számítsd ki a megdobott számok szorzatának várható értékét!

Megoldás.

Legyen X: a megdobott számok szorzata.

Legyen Y: dobások száma, míg 6-ost kapunk, ekkor $Y\sim$Geo$(\frac{1}{6})$.

Alkalmazzuk a teljes várható érték tételt:

$EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}E(X|Y=i)P(Y=i)$

Vizsgáljuk meg az $\{X|Y=i\}$ eseményt! Ekkor az utolsó, i.-nek dobott számnak 6-osnak kell lennie, az előző, $i-1$ megdobott szám pedig bármi lehet a 6-oson kívül. Ezek az 1-es, 2-es, 3-as 4-es és 5-ös, azonos valószínűséggel kaphatjuk meg őket. Jelöljük Z_j-vel azokat a valószínűségi változókat, amik azonos, $\frac{1}{5}$ valószínűséggel veszik fel ezen értékeket, azaz $P(Z_j=k)=\frac{1}{5}\quad k=1,2,3,4,5,\quad j=1,2,\ldots,i-1$, amik a feladat szövege miatt egymástól függetlenek. Ezek közös várható értéke $EZ_1=3$, segítségükkel pedig felírható a keresett feltételes várható érték. Így

$EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}[EZ_1\cdot EZ_2\cdot\ldots\cdot EZ_{i-1}\cdot 4]\cdot P(Y=i)=$

$=\sum\limits_{i=1}^{\infty}3^{i-1}\cdot 4\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}=\frac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-1}=\infty$

Megjegyzés: ha az előző feladatnál szereplő 2. megoldás módszerét alkalmazzuk, akkor

EX-re negatív értéket kapunk, ami lehetetlen. Így ugyan nem kapjuk meg a ∞-t, de lehet sejteni, hogy a várható érték nem létezik.

79.) Egy dobozban 3 cédula van, rajtuk az 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ számok. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, míg 1-est nem kapunk. Határozzuk meg a kihúzott számok szorzatának várható értékét!

Megoldás.
Legyen X: a húzott számok szorzata

1. megoldás

Legyen Y: húzások száma, míg 1-est kapunk, ekkor $Y \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{3})$
Ekkor az utolsó, Y.-nak kihúzott cédulának 1-esnek kell lennie, az előző, $Y-1$ kihúzott cédula pedig bármi lehet az 1-esen kívül. Ezek az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, azonos valószínűséggel kaphatjuk meg őket. Jelöljük Z_j-vel azokat a valószínűségi változókat, amik azonos, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel ezen értékeket, azaz $P(Z_j = \frac{1}{2}) = P(Z_j = \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ $j = 1, 2, \dots$, amik a feladat szövege miatt egymástól függetlenek. Ezek közös várható értéke $EZ_1 = \frac{3}{8}$.
Vegyük észre, hogy X egy véletlen tagszámú szorzatként írható fel a következőképpen:
$X = \prod_{i=1}^{Y-1} Z_i \cdot 1$
Használjuk a teljes várható érték tételt!

$$EX = E\left(\prod_{i=1}^{Y-1} Z_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\prod_{i=1}^{Y-1} Z_i \middle| Y = n\right) \cdot P(Y = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\prod_{i=1}^{n-1} Z_i\right) \cdot P(Y = n) = \sum_{n=1}^{\infty} (EZ_1)^{n-1} \cdot P(Y = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^{n-1} \tfrac{1}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\frac{4}{3} = \frac{4}{9}$$

2. megoldás

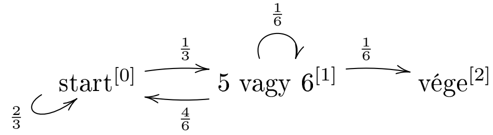
Legyen U: az elsőnek húzott cédula. Használjuk a teljes várható érték tételt.
$EX = E(X|U{=}1)P(U{=}1) + E(X|U{=}\frac{1}{2})P(U{=}\frac{1}{2}) + E(X|U{=}\frac{1}{4})P(U{=}\frac{1}{4}) = 1 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{1}{2} \cdot EX)\frac{1}{3} + (\frac{1}{4} \cdot EX)\frac{1}{3}$
Ez egy egyenlet EX-re: $12EX = 4 + 2EX + EX$, amiből $EX = \frac{4}{9}$ adódik.

80.) Egy bányász a bánya egyik termében rekedt, ahonnan öt út nyílik. Az egyik egy három perces út végén a szabadba vezet. A többi négy közül kettő út esetén öt, másik kettő esetén pedig hét percnyi séta után visszatér ugyanebbe a terembe. A bányász teljesen össze van zavarodva, minden alkalommal a többi választásától függetlenül egyenlő valószínűséggel választ egyet az utak közül. Legyen X a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi X várható értéke?

Megoldás.
Legyen U: az elsőnek választott út száma. Legyen az 1-es út a szabadba vezető, ezen 3 percet kell menni. Legyen a 2-es és 3-as út az, amelyiken 5 percet haladva, visszaérünk a bánya termébe. Legyen a 4-es és 5-ös út az, amelyiken 7 percet haladva, visszaérünk a terembe. Használjuk a teljes várható érték tételt!
$EX = E(X|U = 1)P(U = 1) + E(X|U = 2)P(U = 2) + E(X|U{=}3)P(U{=}3) + E(X|U{=}4)P(U{=}4) + E(X|U{=}5)P(U{=}5) = 3 \cdot \frac{1}{5} + (5 + EX)\frac{1}{5} + (5 + EX)\frac{1}{5} + (7 + EX)\frac{1}{5} + (7 + EX)\frac{1}{5}$
Ez egy egyenlet EX-re: $5EX = 27 + 4EX$, amiből $EX = 27$ perc adódik.

81.) Egy szabályos kockát addig dobálunk, amíg a 6 és 5 számot nem kapjuk két egymás utáni dobás eredményeként. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét!

Megoldás. Készítsünk egy gráfot, ami a kísérlet menetét szemlélteti!

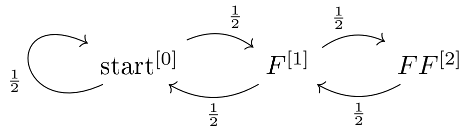


A csúcsok számát a jobb felső szögletes zárójelben lévő szám jelöli.
Jelölje m_i: az i. csúcsból indulva, várhatóan meddig kell várni addig, míg a 6 és 5 számok egymás után kijönnek, ahol $i = 0, 1, 2$.
Nyilván $m_2 = 0$. A teljes várható érték tétel alapján az alábbi egyenleteket írhatjuk fel a 0-s és az 1-es csúcsokra:
$m_0 = (1 + m_0)\frac{2}{3} + (1 + m_1)\frac{1}{3}$
$m_1 = (1 + m_0)\frac{4}{6} + (1 + m_1)\frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6}$
A feladat megoldása az m_0 érték, amire az egyenletrendszert megoldva, 21 adódik.
Emellett $m_1 = 18$.

82.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FF sorozat megjelenik. Átlagosan mennyit (hány dobásnyit) kell erre várnunk?

Megoldás. 1. megoldás

Készítsünk megfelelő gráfot, ami a játék menetét leírja. A csúcsok jobb felső sarkában a kapcsos zárójelben lévő szám a csúcs sorszámát jelöli.



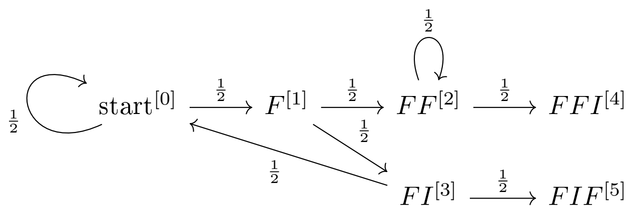
Legyen m_i: átlagosan mennyit kell várni FF megjelenéséig, ha az i. csúcsban vagyunk.
Nyilvánvalóan $m_2 = 0$. A teljes várható tétele alapján a 0 és 1 sorszámú csúcsokra a következő egyenletek írhatók fel:
$m_0 = (1 + m_0) \cdot \frac{1}{2} + (1 + m_1) \cdot \frac{1}{2}$
$m_1 = (1 + m_0) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$
A feladat megoldása az m_0 érték, amire az egyenletrendszert megoldva, 6 adódik. A másik érték: $m_1 = 4$.

2. megoldás

Legyen X: hányadik dobásra jön ki először egymás után két fej.
Használjuk most is a teljes várható érték tételt, de az alapján, hogy mit dobtunk az első két alkalommal. Így a teljes eseményrendszer a következő: $\{FF, FI, IF, II\}$. Vegyük észre, hogy ekkor az $E(X|IF)$ felírása problémát fog jelenteni. Trükk: csökkentsük a teljes eseményrendszert a következő 3 eseményre: $\{FF, FI, I\}$. Ekkor a teljes várható érték tétellel
$EX = E(X|FF)P(FF) + E(X|FI)P(FI) + P(X|I)P(I) =$

$= 2 \cdot \frac{1}{4} + (2 + EX) \cdot \frac{1}{4} + (1 + EX) \cdot \frac{1}{2} = 3EX + 6$
Ezt EX-re rendezve, 6-ot kapunk megoldásnak.

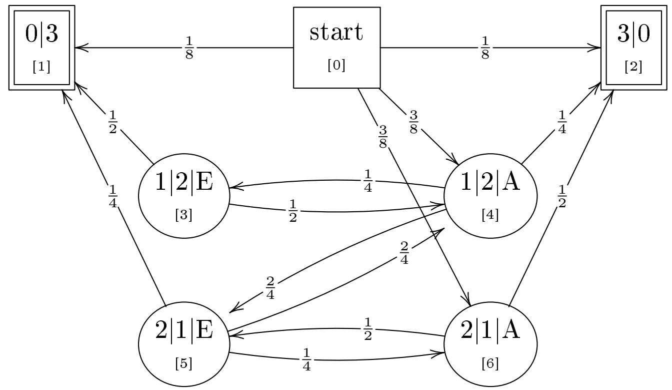
83.) Egy érmével addig dobunk, amíg az FFI vagy az FIF sorozat megjelenik. Mennyi a valószínűsége, hogy FFI jön előbb? Mennyit dobunk átlagosan?
Megoldás. Készítsünk megfelelő gráfot, ami a játék menetét leírja. A csúcsok jobb felső sarkában a kapcsos zárójelben lévő szám a csúcs sorszámát jelöli.



Legyen $p_i = P$(FFI előbb jön ki, ha az i. csúcsban vagyunk). Nyivánvalóan $p_4 = 1$ és $p_5 = 0$. A teljes valószínűség tétele alapján a 0,1,2 és 3 sorszámú csúcsokra a következő egyenletek írhatók fel:
$p_0 = p_0 \cdot \frac{1}{2} + p_1 \cdot \frac{1}{2}$
$p_1 = p_2 \cdot \frac{1}{2} + p_3 \cdot \frac{1}{2}$
$p_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2}$
$p_0 = p_0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}$
Ennek megoldása: $p_0 = \frac{2}{3}$, $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = 1$, $p_3 = \frac{1}{3}$, tehát az első kérdésre adandó válasz $p_0 = \frac{2}{3}$.

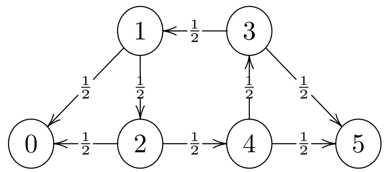
Legyen m_i: átlagosan mennyit kell várni FFI megjelenéséig, ha az i. csúcsban vagyunk. Nyivánvalóan $m_4 = m_5 = 0$. A teljes várható tétele alapján a 0,1,2 és 3 sorszámú csúcsokra a következő egyenletek írhatók fel:
$m_0 = (1 + m_0) \cdot \frac{1}{2} + (1 + m_1) \cdot \frac{1}{2}$
$m_1 = (1 + m_2) \cdot \frac{1}{2} + (1 + m_3) \cdot \frac{1}{2}$
$m_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + m_2) \cdot \frac{1}{2}$
$m_3 = (1 + m_0) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$
A feladat megoldása az m_0 érték, amire az egyenletrendszert megoldva, 6 adódik. A többi érték: $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$.

84.) Eszter és Anna 3 érmével játszik. A játék során felváltva dobják fel a birtokukban lévő összes érmét, s a fejre esett érméket átadják társuknak. A játék addig tart, amíg valamelyik dobás után az összes érme egyik játékoshoz kerül. Kezdetben Eszternél van mind a 3 érme és ő dob először. Mekkora valószínűséggel nyer Eszter?
Megoldás. Készítsünk megfelelő gráfot, ami a játék menetét leírja. Jelölje a csúcsoknál az 1|2|A azt, hogy az adott fordulónál Eszternek 1 érméje van, Annának 2, és most Anna dob. A 3|0 csúcs Eszter győzelmét jelelenti, azaz amikor nála 3 érme van. A csúcsok második sorában kapcsos zárójelben lévő szám a csúcs sorszámát jelöli.



Legyen $p_i = P$(az i. csúcsban vagyunk és Eszter nyer). Nyivánvalóan $p_1 = 0$ és $p_2 = 1$. A teljes valószínűség tétele alapján a 0,3,4,5 és 6 sorszámú csúcsokra a következő egyenletek írhatók fel:
$p_0 = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + p_4 \cdot \frac{3}{8} + p_6 \cdot \frac{3}{8}$
$p_3 = 0 \cdot \frac{1}{2} + p_4 \cdot \frac{1}{2}$
$p_4 = p_3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + p_5 \cdot \frac{1}{2}$
$p_5 = 0 \cdot \frac{1}{4} + p_4 \cdot \frac{1}{2} + p_6 \cdot \frac{1}{4}$
$p_6 = 1 \cdot \frac{1}{2} + p_5 \cdot \frac{1}{2}$
A feladat megoldása a p_0 érték, amire az egyenletrendszert megoldva, $\frac{53}{88}$ adódik. A többi érték: $p_3 = \frac{3}{11}$, $p_4 = \frac{6}{11}$, $p_5 = \frac{5}{11}$, $p_6 = \frac{8}{11}$.

85.) Fej vagy írást játszunk egy szabályos érmével: ha fejet dobunk, megnyerjük a tétet, ha írást, elveszítjük. Amikor leülünk játszani, 1 petákunk van és az a célunk, hogy 5 petákot gyűjtsünk. Feltesszük az összes pénzünket, illetve annyit, amennyi hiányzik a célunk eléréséhez.
a.) Mekkora valószínűséggel érjük el a célunkat?
b.) Válaszoljunk a kérdésekre "óvatos stratégia" esetén is, azaz, ha minden játszmában csak 1 petákot teszünk fel!
Megoldás.
a.) Készítsünk egy gráfot, ami a kísérlet menetét szemlélteti!



A csúcsokon lévő szám azt mutatja, hogy hány petákunk van, ez egyben a csúcs azonosítására is szolgál a továbbiakban.
Legyen $p_i = P$(előbb érünk 5-be, mint 0-ba), $i = 0, 1, \ldots, 5$. Nyilvánvalóan $p_0 = 0$ és $p_5 = 1$. A teljes valószínűség tétele alapján az alábbi egyenleteket írhatjuk fel az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es csúcsokra:

$p_1 = 0 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2}$
$p_2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + p_4 \cdot \frac{1}{2}$
$p_3 = p_1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$
$p_4 = p_3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$

A feladat megoldása a p_1 érték, amire az egyenletrendszert megoldva, $\frac{1}{5}$ adódik.

b.) Most az alábbi ábra készíthető el:

$$\begin{tikzcd}
0 & 1 \arrow[l, bend left, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, bend left, "\frac{1}{2}"] & 2 \arrow[l, bend left, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, bend left, "\frac{1}{2}"] & 3 \arrow[l, bend left, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, bend left, "\frac{1}{2}"] & 4 \arrow[l, bend left, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, bend left, "\frac{1}{2}"] & 5
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan felírva az egyenletrendszert, megint $\frac{1}{5}$ adódik.
Egyenletrendszer nélkül is megúszhatjuk, ha észrevesszük, hogy ez éppen a tönkremenési feladatnak felel meg szimmetrikus esetben. Az 1-es pontból kezdünk, a tönkremenés a 0-ban van. A tönkremenés valószínűsége az előadásról ismert képlettel: $1 - \frac{1-0}{5-0} = \frac{4}{5}$. A feladat viszont a komplementerének a valószínűségét kérdezi, tehát a válasz: $\frac{1}{5}$.

86.) Az Y és X valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$X\backslash Y$	1	2	3	X peremeloszlása
5	$\frac{1}{10}$	...	...	...
10	...	$\frac{2}{10}$	...	...
Y peremeloszlása	...	...	$\frac{4}{10}$	...

a.) Töltsd ki a táblázatot, ha $EX = 7$ és $EY = \frac{11}{5}$!
b.) X és Y függetlenek egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!
c.) Add meg $(X, Y)^T$ valószínűségi vektorváltozó kovariancia mátrixát és korrelációs mátrixát!
d.) $P(X < 7 \,|\, Y < 3) =?$
e.) $E(Y \,|\, X = 10) =?$

Megoldás.

a.) A megadott plusz információkból a peremvalószínűségek kitölthet?k, az együttes valószínűségek pedig kivonásokkal már triviálisan adódni fognak.
Mivel X csak két értéket vehet fel, ezért X felfogható egy indikátorváltozó lineáris transzformáltjaként. Könnyen látható, hogy $X \stackrel{d}{=} 5U + 5$, ahol $U \sim \mathrm{Ind}(p)$. Az ismeretlen p a várható értékből adódik: $7 = EX = 5EU + 5 = 5p + 5 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{5}$
$\frac{22}{10} = EY = P(Y = 1) + 2P(Y = 2) + \frac{12}{10}$, továbbá a valószínűségek összege 1: $1 = P(Y = 1) + P(Y = 2) + \frac{4}{10}$, így az egyenletrendszer megoldásával adódik, hogy $P(Y = 1) = \frac{2}{10}$ és $P(Y = 2) = \frac{4}{10}$.
A kitöltött táblázat:

$X\backslash Y$	1	2	3	X peremeloszlása
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
Y peremeloszlása	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

b.) Nem függetlenek egymástól, ugyanis például
$P(X = 5, Y = 1) = \frac{1}{10} \neq \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{10} = P(X = 5) \cdot P(Y = 1)$
$D^2X = 25D^2U = 25\frac{6}{10}\frac{4}{10} = 6 \quad \Rightarrow \quad DX = \sqrt{6}$
$EY = 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} = \frac{11}{5}$
$EY^2 = 1 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} + 9 \cdot \frac{4}{10} = \frac{27}{5}$
$D^2Y = \frac{27}{5} - \frac{121}{25} = \frac{14}{25} \quad \Rightarrow \quad DY = \frac{\sqrt{14}}{5}$
$E(XY) = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{10} + \ldots + 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5+20+45+10+40+30}{10} = 15$
$\mathrm{Cov}(X, Y) = 15 - 7 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{2}{5}$
$R(X, Y) = \frac{-\frac{2}{5}}{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{14}}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{21}} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{1}{21} \approx 0,048$
tehát gyenge negatív kapcsolat van X és Y között.

c.) $\begin{pmatrix} 6 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{14}{25} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} & 1 \end{pmatrix}$

d.) $P(X < 7 | Y < 3) = \frac{P(X<7, Y<3)}{P(Y<3)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

e.) $P(Y = 1 | X = 10) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$
$P(Y = 2 | X = 10) = \frac{1}{2}$
$P(Y = 3 | X = 10) = \frac{1}{4}$
$E(Y | X = 10) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2$

87.) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	
2	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	
X peremeloszlása				

Határozd meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét! Függetlenek-e egymástól? Amennyiben nem, határozd meg a korrelációjukat!

Megoldás.

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{27}$
2	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{9}{27}$
X peremeloszlása	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{15}{27}$	1

$EX = 0 \cdot \frac{6}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{15}{27} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$
$EX^2 = 0 \cdot \frac{6}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 4 \cdot \frac{15}{27} = \frac{66}{27} = \frac{22}{9}$
$D^2X = \frac{22}{9} - \frac{16}{9} = \frac{6}{9} \quad \Rightarrow \quad DX = \sqrt{\frac{2}{3}}$
$EY = 1 \cdot \frac{10}{27} + 2 \cdot \frac{8}{27} + 3 \cdot \frac{9}{27} = \frac{53}{27}$
$EY^2 = 1 \cdot \frac{10}{27} + 4 \cdot \frac{8}{27} + 9 \cdot \frac{9}{27} = \frac{35}{9}$
$D^2Y = \frac{512}{27^2} \quad \Rightarrow \quad DY = \frac{16}{27}\sqrt{2}$
$E(XY) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{27} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{27} + ... + 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{27} = \frac{3+8+4+16+3+42}{27} = \frac{76}{27}$
Nem függetlenek egymástól, ugyanis például
$P(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{27} \neq \frac{6}{27} \cdot \frac{10}{27} = P(X = 0)P(Y = 1)$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{76}{27} - \frac{4}{3} \cdot \frac{53}{27} = \frac{16}{81}$

$R(X,Y) = \frac{\frac{16}{81}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{16}{27}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad R^2 \approx 0,083$

tehát gyenge pozitív kapcsolat van X és Y között.

88.) Legyen X és Y független, azonos eloszlású. Tegyük fel azt is, hogy véges szórásúak. $R(X, aX+bY) =?$

Megoldás.

$R(X, aX+bY) = \frac{\mathrm{Cov}(X,aX+bY)}{DXD(aX+bY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,aX)+\mathrm{Cov}(X,bY)}{DX\sqrt{D^2(aX)+D^2(bY)+2\mathrm{Cov}(aX,bY)}} =$

$= \frac{aD^2X+bCov(X,Y)}{DX\sqrt{a^2D^2X+b^2D^2Y+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)}} = \frac{aD^2X+0}{DX\sqrt{a^2D^2X+b^2D^2X+0}} = \frac{aD^2X}{DX\sqrt{a^2+b^2}DX} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

89.) Egy dobozban 10 piros, 10 fehér, 10 zöld, 10 kék cédula van, mindegyik 1-től 10-ig számozva. Visszatevéssel húzunk kétszer. Legyen X a pirosak száma a kihúzottak között; Y a kékek száma; Z a 10-esek száma. Határozd meg

a.) X és Y;

b.) X és Z

együttes eloszlását és korrelációját!

Megoldás.

a.) X és Y együttes eloszlása és a peremeloszlások:

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{6}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{16}$
X peremeloszlása	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

A táblázat kitöltésének menete például történhet így:

- A peremek eloszlása ismert: X és Y mindkettő $\mathrm{Bin}\left(2, \frac{1}{4}\right)$ eloszlást követ, így a széleket ki lehet tölteni.
- $P(X=2, Y=2) = P(X=1, Y=2) = P(X=2, Y=1) = 0$
- kivonással $P(X=2, Y=0) = \frac{1}{16}$, hasonlóan $P(X=0, Y=2) = \frac{1}{16}$
- $P(X=0, Y=0) = P(\text{mindkét cédula zöld vagy kék}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{16}$
- a maradék három rubrikát kivonással megkaphatjuk

$EX = EY = \frac{1}{2}$

$DX = DY = \sqrt{\frac{3}{8}}$

$E(XY) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$R(X,Y) = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = -\frac{1}{3}$

b.) X és Z együttes eloszlása és a peremeloszlások:

$Z\backslash X$	0	1	2	Z peremeloszlása
0	$\frac{729}{1600}$	$\frac{486}{1600}$	$\frac{81}{1600}$	$\frac{81}{100} = \frac{1296}{1600}$
1	$\frac{162}{1600}$	$\frac{108}{1600}$	$\frac{18}{1600}$	$\frac{18}{100} = \frac{288}{1600}$
2	$\frac{9}{1600}$	$\frac{6}{1600}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{100} = \frac{16}{1600}$
X peremeloszlása	$\frac{9}{16} = \frac{900}{1600}$	$\frac{6}{16} = \frac{600}{1600}$	$\frac{1}{16} = \frac{100}{1600}$	1

A táblázat kitöltésének menete például történhet így:

- A peremek eloszlása ismert: $X \sim \mathrm{Bin}\left(2, \frac{1}{4}\right)$ és $Z \sim \mathrm{Bin}\left(2, \frac{1}{10}\right)$ így a széleket ki lehet tölteni.
- $P(X=2, Z=2) = P(\text{mindkét cédula a piros 10-es}) = \left(\frac{1}{40}\right)^2 = \frac{1}{1600}$
- $P(X=2, Z=0) = P(\text{mindkét cédula piros, de nem 10-es}) = \left(\frac{9}{40}\right)^2 = \frac{81}{1600}$
- $P(X=0, Z=2) = P(\text{mindkét cédula 10-es, de nem piros}) = \left(\frac{3}{40}\right)^2 = \frac{9}{1600}$
- $P(X=0, Z=0) = P(\text{mindkét cédula se nem piros, se nem 10-es}) = \left(\frac{27}{40}\right)^2 = \frac{729}{1600}$
- a maradék öt rubrikát kivonással megkaphatjuk

A táblázatban lévő 9 együttes valószínűséget megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy azok a megfelelő peremvalószínűségek szorzatai, így X és Z független egymástól $\Rightarrow \quad R = 0$

90.) Egy 52 lapos francia kártyacsomagból húzunk 2 lapot visszatevés nélkül. Legyen X a kőrök, Y pedig az ászok száma. Adjuk meg X és Y korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e ezek a változók?

Megoldás. A feladat szövegéből nyilvánvaló, hogy $X \sim \mathrm{Hipgeo}(52, 13, 2)$ és $Y \sim \mathrm{Hipgeo}(52, 4, 2)$.

Így $EX = \frac{1}{2}$ és $EY = \frac{2}{13}$

X és Y együttes eloszlása és a peremeloszlások:

$Y\backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
0	$\frac{1260}{2652}$	$\frac{864}{2652}$	$\frac{132}{2652}$	$\frac{2256}{2652}$
1	$\frac{216}{2652}$	$\frac{144}{2652}$	$\frac{24}{2652}$	$\frac{384}{2652}$
2	$\frac{6}{2652}$	$\frac{6}{2652}$	0	$\frac{12}{2652}$
X peremeloszlása	$\frac{1482}{2652}$	$\frac{1014}{2652}$	$\frac{156}{2652}$	1

A táblázat kitöltését érdemes a peremekkel kezdeni, utána 4 alkalmas belső érték megállapítása után a többi már egyszerű kivonással adódik:

$P(X=0) = \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1482}{2652}$

$P(X=1) = \frac{\binom{39}{1}\binom{13}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{1014}{2652}$

$P(X=0) = \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{2256}{2652}$

$P(X=1) = \frac{\binom{48}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{384}{2652}$

Nézzük például a középső négyzet "sarkait":

$P(X=0, Y=0) = \frac{\binom{36}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1260}{2652}$

$P(X=2, Y=2) = 0$

$P(X=0, Y=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{2652}$

$P(X=2, Y=0) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{132}{2652}$

$E(XY) = \frac{144+2\cdot 24+12}{2652} = \frac{204}{2652} = \frac{1}{13}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ X és Y **korrelálatlanok**

Mivel van egy 0 a táblázatban, ezért **nem függetlenek**.

91.) Egy szabályos kockával dobunk. Jelölje X a dobott számot, Y pedig azt, hogy a dobott szám hárommal osztva milyen maradékot ad. $R(X,Y) =?$

Megoldás.
Készítsük el az együttes és a peremeloszlásokat tartalmazó táblázatot! X és Y együttes eloszlása és a peremeloszlások:

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6	Y peremeloszlása
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
X peremeloszlása	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$EX = \frac{7}{2}$
$D^2X = \frac{35}{12}$ (kockadobásnál már kiszámoltuk)
$EY = 1$
$EY^2 = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$
$D^2Y = \frac{2}{3}$
$E(XY) = \frac{1+4+4+10}{6} = \frac{19}{6}$
$R(X,Y) = \frac{\frac{19}{6} - \frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}\frac{2}{3}}} = -\sqrt{\frac{2}{35}} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{2}{35} \approx 0,06$
Tehát X és Y között gyenge negatív kapcsolat van.

92.) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen X értéke 1, ha az első dobás fej, és 0, ha írás. Legyen Y értéke 1, ha a második dobás fej, és 0, ha írás. Mutassuk meg, hogy $X+Y$ és $|X-Y|$ korrelálatlanok, de nem függetlenek!
Megoldás.
Készítsük el az együttes és a peremeloszlásokat tartalmazó táblázatot!
$X+Y$ és $|X-Y|$ együttes eloszlása és a peremeloszlások:

$\|X-Y\| \backslash X+Y$	0	1	2	$\|X-Y\|$ peremeloszlása
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$X+Y$ peremeloszlása	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Vegyük észre, hogy $X+Y \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$ és $|X-Y| \sim \text{Ind}(\frac{1}{2})$
$E(X+Y) = 1$
$D^2(X+Y) = \frac{1}{2}$
$E|X-Y| = \frac{1}{2}$
$D^2Y = \frac{1}{4}$
$E(XY) = \frac{1}{2}$
$cov(X,Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad X+Y$ és $|X-Y|$ korrelálatlanok
Viszont nem függetlenek, mert például a bal alsó együttes valószín?séget tekintve $0 \neq \frac{1}{2}\frac{1}{4}$.

93.) Egy dobozban 5 piros és 5 kék golyó van, amiből 100-szor húzunk visszatevéssel. Jelölje X az első 50, Y az első 75, Z pedig az utolsó 30 húzásból a pirosak számát. Határozzuk meg $X+Z$ és Y korrelációs együtthatóját!
Megoldás. Az X-et, Y-t és Z-t fel lehet bontani független, azonos eloszlású val. változók összegére. Legyen U_i: annak az indikátora, hogy az i. húzás piros lett. Ekkor $U_i \sim\text{Ind}\big(\frac{1}{2}\big)$ függetlenek. Ennek fényében $X = \sum_{i=1}^{50} U_i \sim\text{Bin}\big(50, \frac{1}{2}\big)$,
$Y = \sum_{i=1}^{75} U_i \sim\text{Bin}\big(75, \frac{1}{2}\big)$ és $Z = \sum_{i=71}^{100} U_i \sim\text{Bin}\big(30, \frac{1}{2}\big)$.

$R(X+Z,Y) = \frac{cov(X+Z,Y)}{D(X+Z)\cdot DY} = \frac{cov(X,Y)+cov(Z,Y)}{\sqrt{D^2(X+Z)}\cdot DY} =$

$= \frac{\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{75} cov(U_i,U_j) + \sum_{i=1}^{75}\sum_{j=71}^{100} cov(U_i,U_j)}{\sqrt{D^2X+D^2Z+2cov(X,Z)}\cdot\sqrt{75\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{50D^2U_1+5D^2U_1}{\sqrt{50\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=71}^{100} cov(U_i,U_j)}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}} =$

$= \frac{\frac{50}{4}+\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{80}{4}+0}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{55}{4\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{11}{4\sqrt{15}}$

94.) 100-szor húzunk visszatevéssel egy olyan dobozból, amelyben 1 piros és 2 fehér golyó van. X jelentse a kihúzott piros golyók számát az első 50, Y pedig az első 20 kísérletben. $R(X,Y) =?$
Megoldás. Az X-et és Y-t fel lehet bontani független, azonos eloszlású val. változók összegére. Legyen U_i: annak az indikátora, hogy az i. húzás piros lett. Ekkor $U_i \sim\text{Ind}\big(\frac{1}{3}\big)$ függetlenek. Ennek fényében $X = \sum_{i=1}^{50} U_i \sim\text{Bin}\big(50, \frac{1}{3}\big)$ és $Y = \sum_{i=1}^{20} U_i \sim\text{Bin}\big(20, \frac{1}{3}\big)$.

$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{DX\cdot DY} = \frac{\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{20} cov(U_i,U_j)}{\sqrt{50\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{20D^2U_1}{\sqrt{10}\frac{20}{9}} = \frac{20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{10}\frac{20}{9}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

95.) Egy kockát 10-szer feldobunk. X a dobott 6-osok száma, Y a dobott páratlan számok száma. Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját!
Megoldás. Az X-et és Y-t fel lehet bontani független, azonos eloszlású val. változók összegére. Legyen U_i: annak az indikátora, hogy az i. húzás 6-os lett. Legyen V_i: annak az indikátora, hogy az i. húzás páratlan lett. Ekkor $U_i \sim\text{Ind}\big(\frac{1}{6}\big)$ $i = 1,\ldots,10$ függetlenek és $V_i \sim\text{Ind}\big(\frac{1}{2}\big)$ $i = 1,\ldots,10$ függetlenek. Ennek fényében $X = \sum_{i=1}^{10} U_i \sim\text{Bin}\big(10, \frac{1}{6}\big)$ és $Y = \sum_{i=1}^{10} V_i \sim\text{Bin}\big(10, \frac{1}{2}\big)$.

$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{DX\cdot DY} = \frac{\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} cov(U_i,V_j)}{\sqrt{10\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}$

Nézzük meg, hogy mi lesz az egyek U_i-k és V_j közötti kovariancia! Ehhez meg kell gondolni, milyen eloszlású az $U_i \cdot V_j$ valószínűségi változó. Mivel mindkét tényez? önmagában indikátorváltozó, ezért a szorzatuk is az lesz,

$P(U_i\cdot V_j = 1) = P(U_i = 1, V_j = 1) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = j \\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12} & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Így $cov(U_i,V_j) = \begin{cases} 0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{12} & \text{ha } i = j \quad \rightsquigarrow 10 \text{ db} \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = 0 & \text{ha } i \neq j \quad \rightsquigarrow 10^2 - 10 = 90 \text{ db} \end{cases}$

Ezt felhasználva már kiszámítható a keresett korreláció:
$R(X,Y) = \frac{10\cdot cov(U_1,V_1)}{\frac{10\sqrt{5}}{12}} = \frac{10\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)}{\frac{10\sqrt{5}}{12}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

96.)? Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a megállások számának várható értéke és szórása?

Megoldás.
Legyen X : hány emeleten áll meg a lift. Ezt fel lehet bontani független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegére: $X = \sum_{i=1}^{10} U_i$, ahol U_i: annak az indikátora, hogy az i. emeleten megáll a lift. Ezek azonos eloszlásúak, de nem lesznek függetlenek.

$P(U_1 = 1) = P(\text{az 1. emeleten megáll a lift}) =$

$= 1 - P(\text{az 1. emeleten senki se száll ki}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{15}$

$\Rightarrow \quad U_i \sim \mathrm{Ind}\left(1 - 0,9^{15}\right),\ i = 1, \ldots, 10$

$$EX = E\left(\sum_{i=1}^{10} U_i\right) = 10 \cdot EU_1 = 10 \cdot (1 - 0,9^{15}) \approx 7,94$$

$$D^2X = D^2\left(\sum_{i=1}^{10} U_i\right) = 10 \cdot D^2U_1 + (10^2 - 10) \cdot cov(U_1, U_2) =$$

$$= 10 \cdot (1 - 0,9^{15}) \cdot 0,9^{15} + 90 \cdot [E(U_1U_2) - EU_1 \cdot EU_2] =$$

$$= 10 \cdot (1 - 0,9^{15}) \cdot 0,9^{15} + 90 \cdot \left[P(U_1 = 1, U_2 = 1) - (1 - 0,9^{15})^2\right]$$

Annak a valószínűségét, hogy két emeleten is megáll a lift, a következőképp lehet kiszámítani:

$P(U_1 = 1, U_2 = 1) = P(\{U_1 = 1\} \cap \{U_2 = 1\}) =$

$= 1 - P(\{U_1 \neq 1\} \cup \{U_2 \neq 1\}) = 1 - 2P(U_1 \neq 1) + P(U_1 \neq 1, U_2 \neq 1) =$

$= 1 - 2 \cdot 0,9^{15} + 0,8^{15}$

Így a szórás a következő lesz:

$$DX = \sqrt{10 \cdot (1 - 0,9^{15}) \cdot 0,9^{15} + 90 \cdot [1 - 2 \cdot 0,9^{15} + 0,8^{15} - (1 - 0,9^{15})^2]} \approx 0,993$$

97.) Számítsuk ki az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz véletlen permutációi között a fixpontok számának várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás. Legyen X a fixpontok száma. Ezt fel lehet bontani független, azonos eloszlású val. változók összegére: $X = \sum_{i=1}^{10} U_i$, ahol U_i: annak az indikátora, hogy az i. szám az i. helyen van egy permutációban. Ekkor $U_i \sim \mathrm{Ind}\left(\frac{1}{n}\right)$, $i = 1, \ldots, n$.

$$EX = E\left(\sum_{i=1}^{10} U_i\right) = n \cdot EU_1 = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$D^2X = D^2\left(\sum_{i=1}^{10} U_i\right) = n \cdot D^2U_1 + (n^2 - n) \cdot cov(U_1, U_2) =$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + (n^2 - n) \cdot [E(U_1U_2) - EU_1 \cdot EU_2] =$$

$$= \frac{n-1}{n} + (n^2 - n) \cdot \left[P(U_1 = 1, U_2 = 1) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right] =$$

$$= \frac{n-1}{n} + n(n-1) \cdot \left[\frac{(n-2)!}{n!} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right] = \frac{n-1}{n} + 1 - \frac{n-1}{n} = 1$$

98.) Mely c valós paraméter esetén lesznek kétdimenziós sűrűségfüggvények az alábbiak? Adjuk meg az együttes eloszlásfüggvényt, valamint a peremsűrűségfüggvényeket! $P\left(X > \frac{1}{2},\ Y < 1\right) =?$ Független X és Y? $R(X, Y) =?$

a.) $f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{ha } (x, y) \in (0, 1)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

b.) $f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{ha } x \in (0, 2)^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

c.) $f(x, y) = ce^{-\frac{x^2+4y^2}{2}}, \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2$

d.) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{2}e^{-y} & 1 < x < c \text{ és } 0 < y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

Megoldás.

a.) c meghatározása:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = c \int_0^1 \int_0^1 xy\, dx dy = c \int_0^1 y \left(\int_0^1 x\, dx\right) dy =$$

$$= c \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \frac{c}{2} \int_0^1 y\, dy = \frac{c}{4} \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{y=0}^{1} 4xy\, dy = 2x & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A szimmetria miatt

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Tehát X és Y azonos eloszlásúak és függetlenek. $\quad \Rightarrow \quad R = 0$

$$P\left(X > \tfrac{1}{2},\ Y < 1\right) = 4 \int_{1/2}^{1} \int_0^1 xy\, dx dy = 4 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \left(1 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{4}$$

Az együttes eloszlásfüggvény az együttes sűrűségfüggvényből:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } y < 0 \\ \int_0^y \int_0^x 4uv\, du dv = x^2y^2 & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ y^2 & \text{ha } 1 < x \text{ és } 0 < y < 1 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 1 < y \\ 1 & \text{ha } 1 < x \text{ és } 1 < y \end{cases}$$

b.) $1 = \int_0^2 \int_0^2 c(x + y)\, dx\, dy = 2c \int_0^2 \int_0^2 x\, dx\, dy = 4c \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 8c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{8}$

Mivel nem lehet őket szétbontani x-től és y-tól függők szorzatára, ezért láthatóan nem függetlenek. A sűrűségfüggvény szimmetriája miatt elég csak X sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását kiszámítani.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{8}(x + y)\, dy = \frac{x+1}{4} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$EX = \int_0^2 x \frac{x+1}{4}\, dx = \frac{7}{6} = EY$$

$$EX^2 = \int_0^2 x^2 \frac{x+1}{4}\, dx = \frac{5}{3}$$

$$D^2X = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36} = D^2Y$$

$E(XY)=\int\limits_0^2\int\limits_0^2 xy\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy=\int\limits_0^2\int\limits_0^2 \frac{1}{4}x^2y\,dx\,dy=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\frac{4}{3}$

$R(X,Y)=\frac{\frac{4}{3}-\frac{49}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}\quad\Rightarrow\quad R^2=\frac{1}{121}\approx 0,01$

Tehát X és Y között gyenge negatív (lineáris) kapcsolat van.

$P\left(X>\frac{1}{2},\ Y<1\right)=\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{2}\int\limits_0^1 x+y\,dydx=\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{2} x+\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{8}\left(\frac{15}{8}+\frac{3}{4}\right)=\frac{21}{64}$

c.) Vegyük észre, hogy a sűrűségfüggvény szétbontható csak x-től és csak y-tól függő tagok szorzatára, így a korreláció biztosan 0; illetve mindkét szétbontott tag erősen "hasonlít" a normális eloszlás sűrűségfüggvényére.
Az x-től függő tag $e^{-x^2/2}$, ami majdnem az $N(0,1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye. A hiányzó konstans az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Az y-tól függő tag $e^{-4y^2/2}=e^{-\frac{y^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$, ami majdnem az $N(0,(\frac{1}{2})^2)$ eloszlás sűrűségfüggvénye. A hiányzó konstans az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Így tehát $c=\frac{1}{\pi}$.
$P\left(X>\frac{1}{2},\ Y<1\right)=P\left(X>\frac{1}{2}\right)P(Y<1)=\left(1-\Phi(\frac{1}{2})\right)\Phi(2)$

d.) $1=\int\limits_0^\infty\int\limits_1^a \frac{x}{2}e^{-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^a\cdot\left[-e^{-y}\right]_0^\infty=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot 1\quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{5}$
Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy X és Y függetlenek, így a korreláció 0, valamint $Y\sim$Exp(1)
$P\left(X>\frac{1}{2},\ Y<1\right)=P(Y<1)=1-e^{-1}$

99.) Legyenek

a.) $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$ és $Y\sim\mathrm{Bin}(m,p)$ függetlenek;
b.) $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$ és $Y\sim\mathrm{Poi}(\mu)$ függetlenek;
c.) $X\sim\mathrm{Geo}(p)$ és $Y\sim\mathrm{Geo}(p)$ függetlenek.

Milyen eloszlású X az $X+Y=l$ feltétel mellett? Határozd meg az $E(X|X+Y=l)$ feltételes várható értéket!

Megoldás. Először mindegyik esetben meg kell határozni X feltételes eloszlását az $X+Y=l$ feltétel mellett.
$P(X=k|X+Y=l)=\frac{P(X=k,X+Y=l)}{P(X+Y=l)}=\frac{P(X=k,Y=l-k)}{P(X+Y=l)}=\frac{P(X=k)P(Y=l-k)}{P(X+Y=l)}$

a.) Kihasználjuk, hogy $X+Y\sim\mathrm{Bin}(n+m,p)$
$P(X=k|X+Y=l)=\frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot\binom{m}{l-k}p^{l-k}(1-p)^{m-(l-k)}}{\binom{n+m}{l}p^l(1-p^{n+m-l})}=\frac{\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}}{\binom{n+m}{l}}$,
ahol $k=0,1,\dots,\min(n,l)$
Ebből megállapítható, hogy $X|X+Y=l\sim\mathrm{HipGeo}(n+m,n,l)$, így
$E(X|X+Y=l)=l\cdot\frac{n}{n+m}$, ha $l=0,1,\dots,n+m$

b.) Kihasználjuk, hogy $X+Y\sim\mathrm{Poi}(\lambda+\mu)$
$P(X=k|X+Y=l)=\frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{l-k}}{(l-k)!}e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^l}{l!}e^{-\lambda-\mu}}=\binom{l}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{l-k}$, ahol $k=0,1,\dots,l$
Ebből megállapítható, hogy $X|X+Y=l\sim\mathrm{Bin}\left(l,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$, így
$E(X|X+Y=l)=l\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, ha $l=0,1,\dots$

c.) Kihasználjuk, hogy $X+Y\sim\mathrm{NegBin}(2,p)$
$P(X=k|X+Y=l)=\frac{p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{l-k-1}}{\binom{l-1}{1}p^2(1-p^{l-2})}=\frac{1}{l-1}$, ahol $k=1,2,\dots,l-1$
Ebből megállapítható, hogy $X|X+Y=l\sim\mathrm{E}\{1,2,\dots,l-1\}$, így
$E(X|X+Y=l)=\frac{l}{2}$, ha $l=2,3,\dots$

100.) Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y}I(x>0,y>0)$.
a.) Határozd meg Y peremeloszlását!
b.) Milyen eloszlású X az $Y=y$ feltétel mellett? $E(X|Y=y)=?$

Megoldás.

a.) $f_Y(y)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y}I(y>0)dx=I(y>0)\frac{e^{-y}}{y}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{y}x}dx=$
$=I(y>0)\frac{e^{-y}}{y}\left[\frac{e^{-\frac{1}{y}x}}{-\frac{1}{y}}\right]_{x=0}^{x=\infty}=I(y>0)(-e^{-y})(0-1)=e^{-y}I(y>0)$
tehát $Y\sim$Exp(1)

b.) $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{ye^{-y}}I(x>0)=\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{y}x}I(x>0)$, ha $y>0$ rögzített
tehát $X|Y=y\sim\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{y}\right)\quad\Rightarrow\quad E(X|Y=y)=y$, ha $y>0$

101.) Legyen (X,Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$ egységkörlapon. Számítsuk ki az $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvényt és az $E(X^2|Y)$ feltételes várható értéket!

Megoldás. $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & \text{ha } x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx\cdot I(-1<y<1)=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}I(-1<y<1)$

$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & \text{ha } x^2+y^2\le 1;\ y \text{ rögzített}\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$

$E(X^2|Y=y)=\begin{cases}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x^2\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}dx= & \\ =\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{3}(1-y^2) & \text{ha } -1<y<1 \text{ rögzített}\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$

Így $E(X^2|Y)=\frac{1}{3}(1-Y^2)\cdot I(-1<Y<1)$

102.) Legyen $X\sim E\left(\frac{1}{2};1\right)$ és $Y|X=x\sim E(0;x)$, ha $\frac{1}{2}<x<1$.
a.) Határozd meg az együttes eloszlást!
b.) Ez alapján oldd meg a 12.) feladatot!
c.) Határozd meg az $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvényt, majd az $E(X|Y=y)$ feltételes várható értéket!

Megoldás.

a.) A feladat szövege alapján
$f_X(x)=2I\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$ és $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x}I(0<y<x)$, ha $\frac{1}{2}<x<1$ rögzített
Ezekből az együttes eloszlásfüggvény

$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \frac{2}{x}I(0<y<x)I\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$,
tehát az együttes eloszlás nem egyenletes!

b.) Legyen X az a pont, ahol először kettétörjük a pálcát. Szimmetriai megfontolások miatt feltehető, hogy $X > \frac{1}{2}$, ekkor $X \sim \mathrm{E}\left(\frac{1}{2};1\right)$-nek tekinthető. Jelölje Y a második kettétörés helyét, ekkor $Y|X=x \sim \mathrm{E}(0;x)$.
A kapott szakaszok: Y,$X-Y$ és $1-X$. Könnyen látható, hogy háromszöget tudunk belőlük szerkeszteni, ha a következők egyszerre teljesülnek: $X > \frac{1}{2}$, $Y > X-\frac{1}{2}$ és $Y > \frac{1}{2}$. Ezek egy háromszöget határoznak meg, amit megfelelően paraméterezve, a kérdéses valószínűség:

$$P(\text{háromszög szerkeszthető}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x}\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{x}(1-x)\,dx = 2\log 2 - 1$$

c.) Először Y peremsűrűségfüggvényét kell kiszámítani. Figyeljük meg, hogy az együttes sűrűségfüggvény egy derékszögű trapéz felett lesz 0-tól különböző, így amikor Y sűrűségfüggvényét számoljuk, ketté kell bontani a tartományt! Ezután emiatt a feltételes sűrűségfüggvényt is ketté kell majd bontani, ahogyan a kiszámítandó feltételes várható értéket is.

$$f_Y(y) = I\left(0<y<\tfrac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2}{x}\,dx + I\left(\tfrac{1}{2}<y<1\right)\int_{y}^{1}\frac{2}{x}\,dx =$$
$$2\log 2 I\left(0<y<\tfrac{1}{2}\right) - 2\log y I\left(\tfrac{1}{2}<y<1\right)$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{\frac{2}{x}}{2\log 2}I\left(\frac{1}{2}<x<1\right) = \frac{1}{x\log 2}I\left(\frac{1}{2}<x<1\right) & \text{ha } 0<y<\frac{1}{2} \text{ rögzített} \\ \frac{\frac{2}{x}}{-2\log y}I\left(y<x<1\right) = -\frac{1}{x\log y}I\left(y<x<1\right) & \text{ha } \frac{1}{2}<y<1 \text{ rögzített} \end{cases}$$

$$E(X|Y=y) = \begin{cases} \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\log 2}\,dx = \frac{1}{2\log 2} & \text{ha } 0<y<\frac{1}{2} \text{ rögzített} \\ -\int_{y}^{1}\frac{1}{\log y}\,dx = \frac{y-1}{\log y} & \text{ha } \frac{1}{2}<y<1 \text{ rögzített} \end{cases}$$

103.) Megadható-e olyan 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változó, amelyre $P(|X|\geq 2)\geq 0,5$?

Megoldás. Nem, mivel a Csebisev-egyenlőtlenség miatt $P(|X|\geq 2)\leq \frac{D^2X}{2^2} = \frac{1}{4}$.

104.) U és V valószínűségi változókról a következőket tudjuk: $R(U,V) = -0,75$; $EU = 4$; $EV = 6$; $D(U) = D(V) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Becsüld alulról a $P(7 < U+V < 12)$ valószínűséget!

Megoldás. $X := U+V$

Ekkor $EX = EU + EV = 4+6 = 10$
$\mathrm{cov}(U,V) = R(U,V)\cdot DU\cdot DV = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$
$D^2X = D^2U + D^2V + 2\mathrm{Cov}(U,V) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\cdot-\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4}$

$$P(7<X<12) = P(-3<X-10<2) \geq P(-2<X-10<2) =$$
$$= P(|X-10|<2) = 1-P(|X-10|\geq \underbrace{2}_{\varepsilon=}) \geq 1-\frac{D^2X}{\varepsilon^2} =$$
$$= 1-\frac{\frac{1}{4}}{2^2} = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

105.) Hamis érmével dobunk, a fej valószínűsége 0,51.

a.) Becsüljük meg a Csebisev-egyenlőtlenséggel, majd a centrális határértéktétel segítségével is annak a valószínűségét, hogy 10 ezer dobásból legalább 5150 fej!

b.) Hányszor kell dobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 97,5 %-os valószínűséggel több legyen, mint 0,505?

Megoldás.

a.) Legyen X_i valószínűségi változó, ami 1 értéket vesz fel, ha fejet dobunk, és 0-t, amikor írást. Ekkor nyilvánvalóan $X_i \sim \mathrm{Ind}(0,51)$
Legyen Y: mennyi fejet kaptunk 10000 dobásból, azaz
$Y = \sum_{i=1}^{10000} X_i \sim \mathrm{Bin}(10000;0,51)$.
Ekkor $EY = 5100$ és $D^2Y = 2499$.
A becsülendő valószínűség: $P(Y\geq 5150)$
Csebisev-egyenlőtlenséggel:
$P(Y-5100\geq 50)\leq P(|Y-5100|\geq 50)\leq \frac{D^2Y}{50^2} = \frac{2499}{2500}$
Használjuk a centrális határeloszlás-tételt:
$P\left(\frac{Y-5100}{\sqrt{2499}}\geq\frac{50}{\sqrt{2499}}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{2499}}\right)\approx 1-\Phi(1) = 0,1587$

b.) Legyen $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ a fejek relatív gyakorisága, ekkor $E\overline{X}_n = 0,51$ és $D^2\overline{X}_n = \frac{0,51\cdot 0,49}{n}$
A becsülendő valószínűség: $P(\overline{X}_n > 0,505)$
Használjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:
$P(\overline{X}_n > 0,505) = P(\overline{X}_n - 0,51 > -0,005) =$
$= 1-P(\overline{X}_n-0,51\leq -0,005)\geq 1-P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n|\geq 0,005)\geq$
$\geq 1-\frac{D^2\overline{X}_n}{0,005^2} = 1-\frac{0,51\cdot 0,49}{n}\cdot 200^2 = 1-\frac{9996}{n}$
A feladat szövege alapján ennek kell legalább 0,975-nek lennie:
$1-\frac{9996}{n}\geq 0,975$
ezt megoldva $n\geq 399840$ jön ki: legalább 399840-szer kell dobnunk.
Centrális határérték-tétellel:
$P(\overline{X}_n > 0,505) = P\left(\frac{\overline{X}_n - 0,505}{\sqrt{\frac{0,2499}{n}}} > \frac{-0,005}{\sqrt{\frac{0,2499}{n}}}\right)\approx 1-\Phi\left(-\frac{0,005}{\sqrt{\frac{0,2499}{n}}}\right) =$
$= \Phi\left(\frac{0,005}{\sqrt{\frac{0,2499}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2499}}\right)$ A feladat szövege alapján ennek kell legalább 0,975-nek lennie:
$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2499}}\right)\geq 0,975 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{n}\geq\Phi^{-1}(0,975)\cdot 2\sqrt{2499} = 195,96$
tehát $n\geq 38399,2$ adódik: legalább 38400-szor kell dobnunk.

106.) Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

Megoldás. Legyen X_i: az i. tábla tömege $\Rightarrow$ $X_i \sim N(100,3^2)$
Átlagos tömeg: $\overline{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \sim N\left(100,\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$, ugyanis

- $E\overline{X} = \frac{E\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} = \frac{nEX_1}{n} = EX_1 = 100$

- $D^2\overline{X} = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2X_i = \frac{D^2X_1}{n} = \frac{9}{n}$

A feladat szövege alapján $0,9 < P(\overline{X} > 99,5)$
$P(\overline{X} > 99,5) = 1 - P(\overline{X} < 99,5) =$
$= 1 - P\left(\frac{\overline{X}-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}} < \frac{99,5-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}} = -\frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}\right) =$
$= 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$
Átrendezve n-re: $n > [6\Phi^{-1}(0,9)]^2 = [6 \cdot 1,28]^2 = 58,9$
Tehát legalább 59 csokit kell becsomagolni a dobozba.

107.) Egy életbiztosító társaságnak 10000 biztosítottja van, tegyük fel, hogy ők egyforma korúak és egészségűek. 1% annak a valószínűsége, hogy egy ilyen személy az év folyamán meghal. Minden biztosított az év elején 11 ezer Ft-ot fizet be, halála esetén pedig hozzátartozói 1 millió Ft-ot kapnak a biztosítótól. Mi a valószínűsége, hogy a biztosító egy évben ezen biztosításra vonatkozóan nem lesz veszteséges?

Megoldás. Legyen X_i : a biztosító bevétele (e Ft-ban) az adott biztosított személytől, $i = 1, 2, \ldots, 10000$. Ekkor $P(X_i = 11) = 0,99$ és $P(X_i = -989) = 0,01 \quad \Rightarrow$
$X_i \stackrel{d}{=} 1000\mathrm{Ind}(0,99) - 989$
A keresett valószínűség a centrális határeloszlás-tétellel közelíthető

$$P(X_1 + \ldots + X_{10000} \geq 0) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10000} X_i - 10000 \cdot EX_1}{\sqrt{10000 \cdot DX_1}} < \frac{0 - 10000 \cdot (1000 \cdot 0,99 - 989)}{\sqrt{10000 \cdot 1000 \cdot \sqrt{0,99 \cdot 0,01}}}\right) \approx$$

$\approx 1 - \Phi\left(-\frac{10000 \cdot 1}{1000 \cdot \sqrt{99}}\right) = \Phi(\frac{10}{\sqrt{99}}) \approx \Phi(1) = 0,8413$

108.) Legalább hány embert kell megkérdezni egy közvéleménykutatásnál, ha egy adott párt támogatottságát (az eltérést a várható támogatottságtól) legalább 95%-os valószínűséggel 0,01–nél kisebb eltéréssel szeretnénk megbecsülni?

a.) Számoljunk a Csebisev-egyenlőtlenséggel.
b.) Számoljunk a normális eloszlással.

Megoldás. X_i $(i = 1, ..., n)$ legyen az a valószínűségi változó, amely az 1 értéket veszi fel, ha az i. ember a pártra szavaz (ismeretlen p valószínűséggel), és 0 értéket vesz fel, amennyiben nem
Így $X_i \sim \mathrm{Ind}(p) \quad \Rightarrow \quad EX_i = p$, $D^2X_i = p(1-p)$
Becsüljük a támogatottságot $\overline{X}$-gal
Így $E\overline{X} = EX_1 = p$ és $D^2\overline{X} = \frac{D^2X_1}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$

a.) $P(\left|\overline{X} - E\overline{X}\right| < 0,01) = 1 - P(\left|\overline{X} - E\overline{X}\right| \geq \overbrace{0,01}^{\varepsilon=}) \geq 1 - \frac{D^2\overline{X}}{\varepsilon^2} =$
$= 1 - \frac{\frac{p(1-p)}{n}}{\frac{1}{100^2}} = 1 - \frac{10000p(1-p)}{n}$
és ennek kell nagyobbnak lennie 0,95-nél:
$1 - \frac{10000p(1-p)}{n} \geq 0,95 \quad \Rightarrow \quad 0,05 \geq \frac{10000p(1-p)}{n} \quad \Rightarrow \quad n \geq 200000p(1-p)$.
Például ha $p = 0,1$, akkor az $n \geq 18000$ becslést kapjuk.

b.) Feltesszük, hogy $\overline{X} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$0,95 \leq P(|\overline{X} - E\overline{X}| < 0,01) = P(-0,01 < \overline{X} - p < 0,01) =$
$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{0,01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) =$
$= \Phi\left(\frac{1}{100\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{100\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{p(1-p)}} \geq \Phi^{-1}(0,975) = 1,96 \quad \Rightarrow \quad n \geq 196^2p(1-p)$
Például ha $p = 0,1$, akkor az $n \geq 3457$ becslést kapjuk.

109.) Egy dobókockát 720-szor feldobunk. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott 6-osok száma legalább 110, de 140-nél kisebb!

Megoldás.
Legyen X_i: annak az indikátora, hogy az i. dobás 6-os. Ekkor $X_i \sim \mathrm{Ind}\left(\frac{1}{6}\right)$ függetlenek, $i = 1, 2, \ldots, 720$.
720 dobásból a 6-osok száma: $Y = \sum_{i=1}^{720} X_i \sim \mathrm{Bin}\left(720, \frac{1}{6}\right)$
$EY = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$
$D^2Y = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100$
A kiszámítandó valószínűség:
$P(110 \leq Y < 140) = P\left(\frac{110-120}{10} \leq \frac{Y-120}{10} < \frac{140-120}{10}\right) \approx$
$\approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0,8186$

110.) Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1,0,2,2 számok. 192-szer húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlástétel alkalmazásával határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 108, de 162-nél kisebb!

Megoldás.
Legyen X_i: az i. húzás során kapott szám. Ekkor $X_1, \ldots, X_{192}$ függetlenek és azonos eloszlásúak, $P(X_1 = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$ és $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.
A húzások összege: $Y = \sum_{i=1}^{192} X_i$
$EX_1 = \frac{-1+4}{4} = \frac{3}{4}$
$EX_1^2 = \frac{1+8}{4} = \frac{9}{4}$
$DX_1^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{16} = \frac{27}{16}$
$EY = 192 \cdot EX_1 = 192 \cdot \frac{3}{4} = 144$
$D^2Y = 192 \cdot \frac{27}{16} = \frac{27}{16} = 324 = 18^2$
A kiszámítandó valószínűség:
$P(108 \leq Y < 162) = P\left(\frac{108-144}{18} \leq \frac{Y-144}{18} < \frac{162-144}{18}\right) \approx$
$\approx \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \approx 0,8186$

111.) X_i-k $(i = 1, 2, \ldots)$ független val. változók Hova konvergál és hogyan?

a.) $X_i \sim \mathrm{Ind}(p)$ $\qquad \frac{X_1^5 + \ldots + X_n^5}{n}$
b.) X_i: az i-edik kockadobás eredménye $\qquad \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}$
c.) $X_i \sim \mathrm{Exp}(2)$ $\qquad \frac{e^{X_1} + \ldots + e^{X_n}}{n}$

Megoldás. Mindegyik feladatrészben a nagy számok erős törvényét fogjuk alkalmazni, így a konvergencia mindenhol 1 valószínűségű lesz.

a.) $\frac{X_1^5+...+X_n^5}{n} \overset{n\to\infty}{\to} EX_1^5 = 1^5 \cdot p + 0^5 \cdot (1-p) = p$

b.) X_i-k közös eloszlása: $P(X_i = k) = \frac{1}{6}$, $k = 1, 2, ..., 6$

$\frac{X_1^2+...+X_n^2}{n} \overset{n\to\infty}{\to} EX_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

c.) $\frac{e^{X_1}+...+e^{X_n}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} E(e_1^X) = \int\limits_0^\infty e^x \cdot 2e^{-2x}\,dx = 2\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 2\left[e^{-x}\right]_\infty^0 = 2$

112.) Számítsuk ki a következő mennyiséget: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$

Megoldás. Látszólag a feladatnak nincs valószínűségszámítási kötődése, viszont ha kicsit figyelmesebben ránézünk a szummára, láthatjuk, hogy belül az $e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ éppen annak a valószínűsége, hogy egy n paraméterű, Poisson-eloszlású valószínűségi változó k értéket vesz fel.

Legyen tehát $X \sim$Poi(n), ami tudjuk, hogy felbontható n darab független Poi(1) eloszlású valószínűségi változó összegére. Ez alapján:

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} P(X=k) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X \le n)$

A felbontás miatt pedig használható a centális határeloszlástétel, tehát a keresett valószínűség

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{X-EX}{DX} \le \frac{n-n}{\sqrt{n}}) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$
