2. ZH

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Összesen
Max pontszám	15	7	5	7	7	9	50
Elért pontszám							

1.) Legyen $X_1, \ldots, X_n$ a következő sűrűségfüggvényű eloszlásból vett minta: (c >0 valós paraméter)

$$f(x) = \begin{cases} cx^{c-1} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A megfigyelt értékek: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

a.) Határozd meg c ismeretlen paraméter ML-becslését a megfigyelt értékek alapján!
b.) Határozd meg c ismeretlen paraméter momentum becslését a megfigyelt értékek alapján!
c.) Határozz meg torzítatlan becslést $\frac{1}{c+1}$-re a mintaátlag segítségével!
d.) Hová tart és hogyan $\frac{X_1^3+\ldots+X_n^3}{n}$? (5+4+2+4=15 pont)

Megoldás.

a.) $\hat{c}_{ML} = -\frac{n}{\sum \log X_i}$, a megfigyelt értékekből c becslése: $-\frac{5}{\log(0{,}0012)} \approx 1,04$;
b.) $\hat{c}_M = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$, a megfigyelt értékekből c becslése: $\frac{3}{7} \approx 0,43$;
c.) például $1 - \overline{X}$ megfelelő becslés;
d.) 1 valószínűséggel $\frac{c}{c+3}$-hoz tart.

2.) Legyenek U és V Geo($\frac{1}{6}$) eloszlású valószínűségi változók, amikre R(U, V)=$-\frac{59}{60}$.
Becsüld alulról a P($10 < U + V < 14$) valószínűséget a Csebisev-egyenlőtlenséggel! (7 pont)
Megoldás. $P(10 < U + V < 14) \geq \frac{3}{4}$

3.) Legyenek adottak a következő (x,y) párok:

x_i	1	2	7	6	4
y_i	5	4	1	2	3

a.) Határozzuk meg az $aX + b$ alakú regessziós egyenest!
b.) Adjunk előrejelzést x=15-re a regressziós egyenes alapján! (4+1=5 pont)

Megoldás.

a.) $-\frac{8}{13}x + \frac{63}{13}$
b.) $-\frac{57}{13}$

4.) Jocó 1000-szer feldobja a Pesta bácsitól karácsonyra kapott bűvös, 8 oldalú kockáját. A kockán lévő számok az 1,2,. . . ,8. A dobások eredményekeit a következő táblázat tartalmazza:

Dobások eredménye	1	2	3	4	5	6	7	8	Összesen
Gyakoriságok	100	120	110	130	140	110	150	140	1000

Döntsük el 95 %-os megbízhatósággal, hogy a kocka szabályos-e! (a kocka szabályos ⇔ a valószínűségek minden osztály esetén azonosak, azaz $p_i = \ldots$) (7 pont)
Megoldás. Illeszkedésvizsgálatot kell végezni:
H_0: $p_1 = ... = p_8 = \frac{1}{8}$ és H_1 : nem szabályos
Próbastatisztika: $T_{1000} = 17,6$
Kritikus érték: $\chi^2_{7;0,05} = 14,1$
Döntés: 95%-os megbízhatóság esetén azt mondhatjuk, hogy a kocka nem szabályos.

5.) X és Y **független** val.változók együttes és peremeloszlásait tartalmazza a következő táblázat:

$Y \backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{1}{24}$	...	...	$\frac{1}{4}$
2	...	...	...	...
X peremeloszlása	...	$\frac{1}{3}$	...	...

a.) Töltsd ki a táblázatot és határozd meg X várható értékét!
b.) R(X,Y)=? (6+1=7 pont)

Megoldás.

a.)

$Y \backslash X$	0	1	2	Y peremeloszlása
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$
X peremeloszlása	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$EX = \frac{4}{3}$

b.) $R(X, Y) = 0$

6.) A Magyarországon forgalmazott Sivatagi Satu 1500SS személygépkocsikra a gyári fogyasztásadat 9,8 l/100 km, 0,2 l/100 km szórással. A magyarországi forgalmazó mintavételes eljárással kíván információt kapni arról, hogy a gépkocsitípusnak ténylegesen mekkora a várható fogyasztása. A beérkezett szállítmányból 25 tagú mintát vettek és görgős próbapadon mérték a fogyasztásukat. A mérési eredmények (l/100km):
y_i adatok: 9,95; 10,22; 9,87; 10,06; ... ; 10,08.
Ezekből számított $\sum_i y_i = 251,5$; $\sum_i (y_i - \overline{y})^2 = 0,6$.
A fogyasztás normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető.

a.) Készítsünk 95%-os megbízhatóságú intervallumbecslést a várható átlagos fogyasztásra **és** annak szórására vonatkozóan a minta alapján!
$\chi^2_{24;0,025} = 12,401$; $\chi^2_{25;0,025} = 13,12$; $\chi^2_{24;0,05} = 13,848$; $\chi^2_{25;0,05} = 14,611$;
$\chi^2_{24;0,975} = 39,364$; $\chi^2_{25;0,975} = 40,646$; $\chi^2_{24;0,95} = 36,415$; $\chi^2_{25;0,95} = 37,652$;

b.) Végezz alkalmas próbát arra vonatkozóan, hogy a várható átlagos fogyasztás 9,8 l/100km, azaz $H_0 : m = 9,8$! Értelmezd az eredményt!
(5+4=9 pont)

Megoldás.

a.) várható értékre: $10,06 \pm 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{25}}$
szórásra: $\left[\sqrt{\frac{0,6}{39,364}}; \sqrt{\frac{0,6}{12,401}}\right]$

b.) egymintás u-próbát kell végezni:
$H_0 : m = 9,8$ és $H_1 : m \neq 9,8$ (lehetne $H_1 : m > 9,8$ is)
Próbastatisztika: $u = 6,5$
Kritikus értékek: -1,96 és 1,96
Döntés: 95%-os megbízhatóság esetén azt mondhatjuk, hogy a várható átlagos fogyasztás nem egyenlő 9,8 l/100km-rel.